Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ 2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

КЛАСС 11

Вариант 1

Задание 1 (25 баллов)

На плоскости нарисована ограниченная фигура F, площадь которой равна $1\frac{1}{2025}$. Внутри нее расположены 2025 фигур $F_1; F_2; \dots; F_{2025}$, сумма площадей которых больше 2025. Верно ли утверждение, что нет такой точки, которая бы принадлежала одновременно всем фигурам F_i; $i = 1; 2; \dots; 2025$? Ответ обосновать.

Решение:

Площади фигур $F_1; F_2; \dots; F_{2025}$ обозначим S_1; S_2; …; S_{2025}. Фигуры, дополняющие F_i до F, обозначим $\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_{2025}$, а их площади $\bar{S}_1; \bar{S}_2 \dots \bar{S}_{2025}$. Так как $S_i + \bar{S}_i = 1\frac{1}{2025}$, то

$$\sum S_i + \sum \bar{S}_i = 2026 \rightarrow \sum S_i = 2026 - \sum \bar{S}_i.$$

По условию

$$\sum S_i > 2025 \rightarrow 2026 - \sum \bar{S}_i > 2025 \rightarrow \sum \bar{S}_i < 1,$$

следовательно, дополняющие фигуры $\bar{F}_i$ не могут покрывать всю фигуру F, то есть существует точка , которая не принадлежит всем $\bar{F}_i$ одновременно , но тогда эта точка одновременно входит во все фигуры F_i, т.е. является их общей.

Ответ: не верно.

Задание 2 (25 баллов)

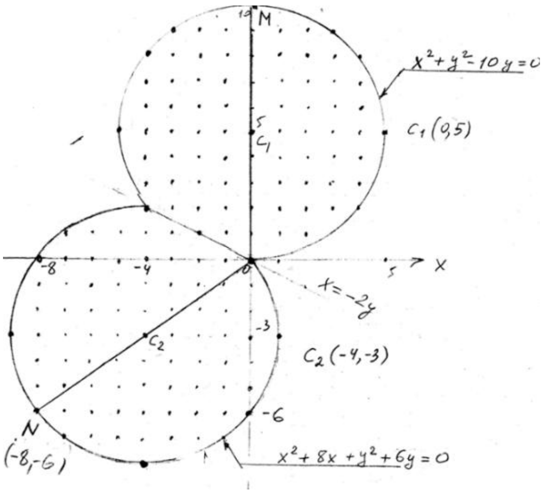
Решите неравенство: $x^2 + y^2 + 4x - 2y \le |8y + 4x|$. Сколько точек с целыми координатами являются решением этого неравенства? Найдите ту (те) точки, расстояние от которых до начала координат максимально?

Решение:

1) $\begin{cases} 8y + 4x \ge 0 \\ x^2 + y^2 - 10y \le 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 8y + 4x \ge 0 \\ x^2 + (y-5)^2 \le 25 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8y + 4x < 0 \\ x^2 + y^2 + 8x + 6y \le 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 8y + 4x < 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 \le 25 \end{cases}$

Построим область, определяемую данными системами неравенств.



Точки, диаметрально удаленные от начала координат: M (0;10) и N (-8; -6)

Всего решений с целыми координатами 157.

Задание 3 (20 баллов)

Часы со стрелками показывают 20 часов 25 минут 26 секунд. Через сколько секунд впервые часовая стрелка образует прямой угол с секундной?

Решение

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает $\left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right)$ часов, секундная стрелка показывает 26 секунд.

Часовая стрелка имеет угловую скорость $30\,{}^{\circ}/\text{час}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол

$$\alpha = \left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right) \cdot 30\,{}^{\circ}/\text{час} = \left(240 + \frac{25}{2} + \frac{13}{60}\right)^{\circ} = 252\frac{43}{60}{}^{\circ}.$$

Секундная стрелка имеет угловую скорость $6^{\circ}/\text{сек}$, поэтому от момента времени 08ч 25м 00с она повернется на угол

$$\beta = 26 \cdot 6\,{}^{\circ}/\text{мин} = 156^{\circ}.$$

Найдем угол между часовой и секундной стрелками

$$\alpha - \beta = 252\frac{43}{60} - 156 = 96\frac{43}{60}{}^{\circ}.$$

Пусть секундная стрелка образует с часовой развернутый угол через t секунд. За это время часовая стрелка (угловая скорость $30\,{}^{\circ}/\text{час} = \frac{1}{120}\,{}^{\circ}/\text{сек}$) повернется на угол $\frac{1}{120}t$, а секундная стрелка (угловая скорость $6^{\circ}/\text{сек}$) - на угол $6t$; следовательно,

$$6t = \alpha - \beta + \frac{1}{120}t - 90, \qquad \frac{719}{120}t = 6\frac{43}{60}, \qquad t = \frac{806}{719}$$

$$t = 1\frac{87}{719}\text{ сек.}$$

Ответ: $1\frac{87}{719}$ **сек.**

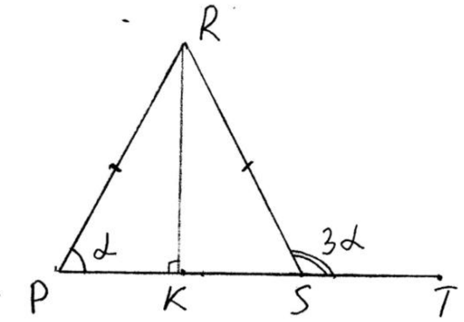
Задание 4 (20 баллов)
На календаре 12 июля 2025 года, суббота. Какими будут дата и день недели спустя 500 дней, если первым днем считать 13 июля 2025 года. Ответ обоснуйте.

Решение:
Так как 2026 год не високосный, то 365-м днем будет 12 июля, только 2026 года.
В июле, августе -31 день, в сентябре – 30 дней, в октябре – 31 день. Поэтому, через 31+31+30+31=123 дня наступит 12 ноября. Осталось 500-365-123=12 суток. 12-ый день после 12 ноября 2026 года будет 24 ноября 2026 года. Посчитаем какой это будет день недели. Так как $500 = 71 \cdot 7 + 3$, то день недели: суббота +3 = вторник.

Ответ: 24 ноября 2026 год, вторник.

Задание 5 (10 баллов)
На прямой в указанном порядке расположены точки P, S, T. Точка R находится вне прямой, при этом угол RPS в 3 раза меньше угла RST. Найдите площадь треугольника PRS, если он равнобедренный , $PS = 1$.

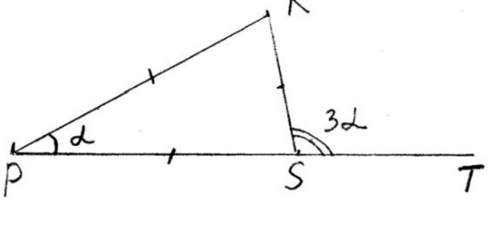
Решение



1 случай
Так как $\angle RST = 3\alpha$, то $\angle PRS = 2\alpha$ по свойству внешнего угла и т.к. ΔPRS – равнобедренный , то равные стороны будут PR и RS, т.е
$PR = RS$, следовательно, $\angle RPS = \angle RSP = \alpha$.
С другой стороны, $\angle RSP = \pi - 3\alpha$(смежный с углом RST), поэтому $\alpha = \pi - 3\alpha$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
RK –высота $RK = PK \cdot tg\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$,
$$S_{prs} = \frac{1}{2}PS \cdot RK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

2 случай



Так как $\angle RST = 3\alpha$, то $\angle PRS = 2\alpha$ по свойству внешнего угла и т.к. ΔPRS – равнобедренный , то равные стороны могут быть PR и PS, т.е
$PR = RS$, следовательно, $\angle PRS = \angle PSR = 2\alpha$.
С другой стороны, $\angle RSP = \pi - 3\alpha$(смежный с углом RST), поэтому $2\alpha = \pi - 3\alpha$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{5}$.
$$S_{prs} = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot PS \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}sin\frac{\pi}{5}$$
Ответ: $\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{5}$.