1 | 2 | 3 | 4 | 5
25 | 20 | 5 | 5 | 5

Σ60

математика
предмет

ШИФР 57-9-М-05

Задание 1.

(25)

$2023^x + 2024^x = 5p$

$p, x \in N_0$

Заметим, что $2023^x + 2024^x \vdots 5$

Рассмотрим остатки при делении на 5 степеней 2023 и 2024, предварительно заметив, что остаток от деления на 5 определяется последней цифрой числа:

x	2023^x	ост.
1	2023	3
2	9	4
3	7	2
4	1	1
5	3	3

x	2024^x	ост.
1	2024	4
2	6	1
3	4	4

Цикл остатков у степеней 2023:

3, 4, 2, 1

Цикл остатков у степеней 2024:

4, 1

Нам нужно, чтобы сумма остатков делилась на 5. Наложим друг на друга два цикла:

3 $\boxed{4}$ 2 1 3 $\boxed{4}$ 2 1 3 $\boxed{4}$ 2 1 ......
4 $\boxed{1}$ 4 1 4 $\boxed{1}$ 4 1 4 $\boxed{1}$ 4 1 ......

Видно, что нужная нам комбинация остатков получается каждую 4-ю степень, начиная с 2.
Т.е. решением уравнения является каждое 4-е x начиная с $x=2$. Прим. для $x=2$: $2023^2 + 2024^2 = 5p$; $5p = 8189105$; $p = 1637821$

Ответ: $x \in [2, \cancel{X}\ 6, 10, 14, 18, \ldots]$.

Задание 2. 20

$НОК(11, 23) = 11 \cdot 23 = 253$

Заметим, что на доске точно есть минимум 8 чисел, которые делятся на 11 и на 23 => на 253.

Разложим число 2024 на простые множители:

$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23 = 8 \cdot 253$

Т.к. минимум на доске находится 8 чисел, кратных 253, то минимальные из них это:

$253, 506, 759, \ldots, \underset{\text{8-е число}}{2024}$

Значит, на доске всегда есть число, минимально равное 2024.

Задание 4. 5

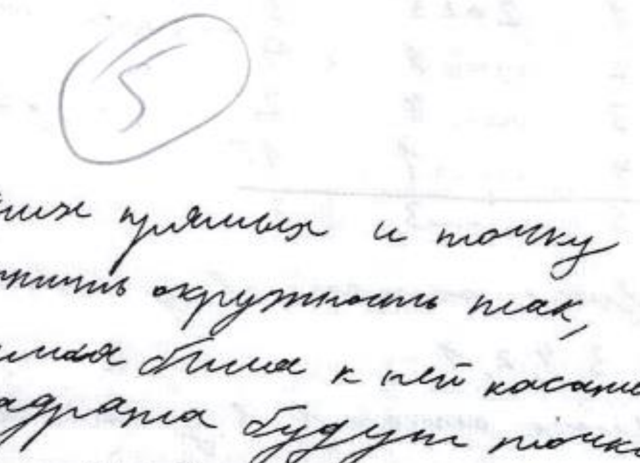
Да, можно.

Алгоритм:

Выбрать любую из крайних прямых и точку на ней. Из этой точки начертить окружность так, чтобы центральная прямая была к ней касательной. Тремя точками квадрата будут точки пересечения окружности с прямыми. Четвёртую точку достраиваем пользуясь циркулем и линейкой, она лежит на серпере к диаметру, ограниченному окружностью на прямой.

Углы 90° т.к. опираются на диаметр.

4-я точка не попадёт на 3-ю прямую т.к. мы взяли крайнюю прямую вначале, 4-я точка в разных полуплоскостях с 3-й прямой



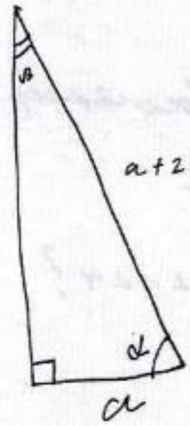
Нет! По условию все точки должны лежать на прямых.

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

математика
предмет

ШИФР 57-9-М-05

Задание 5



по т. Пифагора:

$a^2+(a+b)^2=(a+2b)^2$

$a^2+a^2+2ab+b^2=a^2+4ab+4b^2$

$a^2-2ab-3b^2=0 \ |:ab$

$\frac{a}{b}-2-\frac{3b}{a}=0$

$\frac{a}{b}=2+\frac{3b}{a}$

5

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1) $\sin\alpha=\frac{a+b}{a+2b}$

$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}$

$\sin\alpha=1+\frac{a+b}{b}=2+\frac{a}{b}=2+2+\frac{3b}{a}=4+\frac{3b}{a}$

2) $\cos\alpha=\frac{a}{a+2b}$; $\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{a+2b}{a}=1+\frac{2b}{a}$

$\cos\alpha=1+\frac{a}{2b}=2+\frac{1,5b}{a}$

$\cos\alpha=\frac{1}{1+\frac{2b}{a}}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4+\frac{3b}{a}}{2+\frac{1,5b}{a}}=2$

Ответ: 2.

5

Задание 3.

Рассмотрим указанную последовательность:

n	сумма
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

Заметим, что сумма первых n подряд идущих натуральных нечетных чисел равна n^2.
Тогда вопрос задачи эквивалентен этому:
Найдётся ли такое $n \in N_0$, что n^2 оканчивается на 2024?

Заметим, что если число заканчивается на 2024, то оно делится на 8, нам нужно четное n.

Все квадраты четных чисел заканчиваются на: 4,6,0

а их последние цифры идут таким циклом: 4,6,6,4,0

Много было найдено только что:

$18^2=324$ оканчивается на 24

$32^2=1024$ оканчивается на 24