Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 5 **ШИФР _______________**

Задание 1 (15 баллов)
Таня решила купить книги на распродаже. Все они стоят одинаково. При покупке двух книг у нее остается 50 рублей, а на покупку 4-х книг не хватает 150 рублей. Сколько стоит каждая книга?

Решение:
Из условия известно, что у Тани всего было денег 50 рублей плюс стоимость 2-х книг, а все ее деньги плюс 150 рублей это стоимость 4-х книг, значит 2 книги стоят 200 рублей, а одна книга стоит 100 рублей.

Ответ: 100 рублей

Задание 2 (25 баллов)
На новогодний утренник 2022 года Дед Мороз взял 2022 конфеты. Когда он их раздал, выяснилось, что каждый ребенок получил одно и тоже целое число конфет. А в 2023 году история повторилась! Сколько могло быть ребят на утреннике 2023 года, если Дед Мороз раздал 2023 конфеты всем присутствующим поровну, а ребят на утреннике было больше 20, но меньше 300?

Решение:
Так как $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$, *то делителями числа 2023 будут числа 1, 7, 17,* $7 \cdot 17, 17 \cdot 17$ и само число 2023, *то есть имеется 6 различных делителей. Так как ребят на утреннике было больше 20, то их могло быть:*
$7 \cdot 17 = 119$ *человек, и они получают по 17 конфет или*
$17 \cdot 17 = 289$ человек. *В этом случае они получают по 7 конфет.*

Ответ: 289, 119

Задание 3 (15 баллов)

Дима посылает СМС- сообщение с числом 7 своему приятелю с просьбой, чтобы тот умножил его на 2 или на 5 и переслал следующему. После череды пересылок Дима получил СМС- сообщение с числом 2240. Сколько людей участвовало в пересылке, включая Диму?

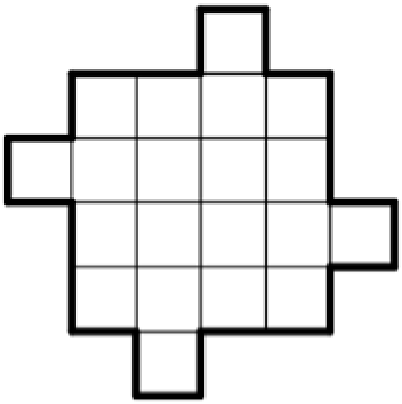
Решение.

Так как $2240 = 7 \cdot 5 \cdot 2^6$, *то один из участников умножил число на 5, а 6 человек умножили на 2 и с учетом Димы, получившего СМС- сообщение с с числом 2240, в пересылке участвовало 8 человек.*

Ответ: *8.*

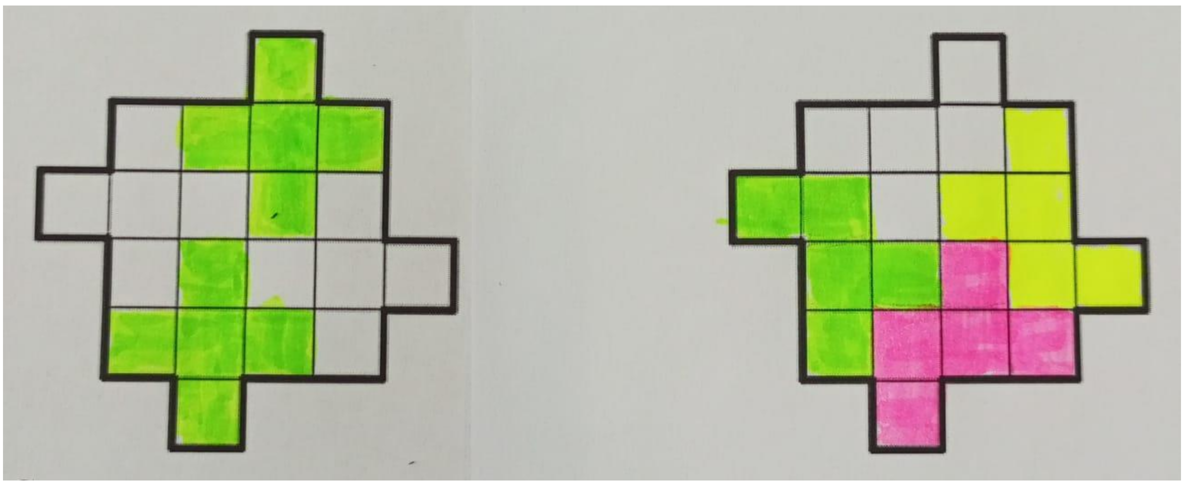
Задание 4 **(25 баллов)**

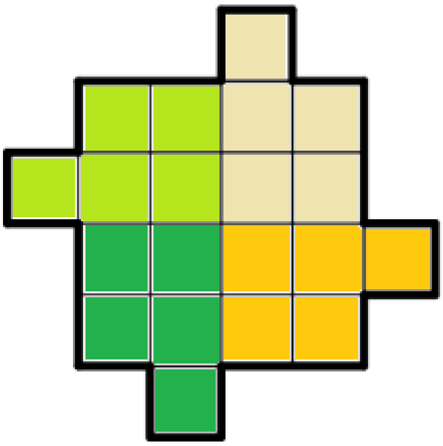
Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре равные части и по форме, и по площади. Разрезы проводятся по линиям сетки.



Сколько решений и каких имеет эта задача?

Решение:





Ответ: три решения.

Задание 5 (20 баллов)

Ваня поднимается по ступенькам с 1 на 13 этаж за 96 секунд. Сколько времени нужно Ване, чтобы подняться на 17-й этаж?

Решение:

При подъеме с 1-го на 13-ый этаж Ваня поднимается на 12 этажей. Время подъема на один этаж равно $96:12=8$ *секунд. С 1-го на 17-й этаж Ваня поднимается на 16 этажей. Поэтому, чтобы подняться Ване на 17 этаж, потребуется* $16\cdot 8=128$ *секунд.*

Ответ: 128 *секунд*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 6 **ШИФР ________________**

Задание 1 (20 баллов)

Найти наименьшее десятизначное число, которое делится на 7 и все цифры которого различны.

Решение:
Из цифр от 0 до 9 составим наименьшее десятизначное число 1023456789. Разделим это число на 7. В результате деления убеждаемся, что число $10234567 = 1462081 \cdot 7$, *т.е. делится на 7. Оставшиеся цифры 8 и 9 надо расположить так, чтобы число 10234567** делилось на 7. Из этих двух цифр только число 98 делится на 7. Тогда искомое число равно 1023456798.*

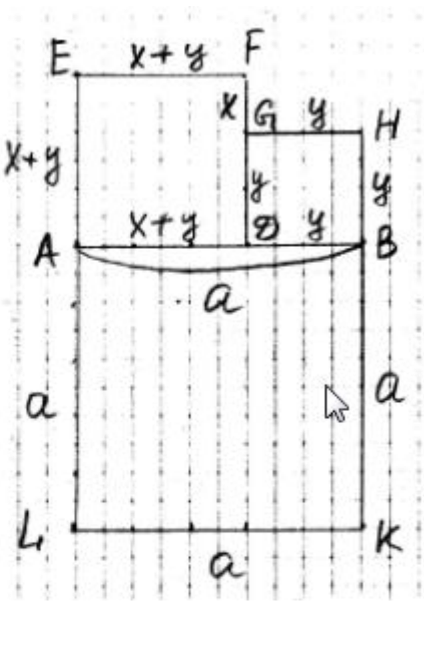
Ответ: *1023456798*

Задание 2 (25 баллов)
В числе 2013 переставили цифры так, что все цифры оказались не на своем месте. В результате получили четырёхзначное четное число, которое при делении на 11 дает остаток 4. Найти это число.

Решение:
Так как искомое число четное, то оно должно оканчиваться на 0 или 2. Рассмотрим числа 3120, 1320, 1230,1302 и 3102, полученные из числа 2013 перестановкой цифр (ни одна цифра не сохранила свое место!). Так как
$3102 = 11 \cdot 283$, $1320 = 120 \cdot 11$, $3120 = 283 \cdot 11 + 7$,
$1230 = 111 \cdot 11 + 9$, $1302 = 118 \cdot 11 + 4$, *то это число 1302.*

Ответ: *1302*

Задание 3 (15 баллов)
На стороне AB квадрата ABKL отмечена точка D. На отрезках AD и BD во внешнюю сторону от исходного квадрата построены квадраты AEFD и BDGH. Известно, что периметр многоугольника EFGHKL равен 27, сторона квадрата ABKL равна 5. Найти FG.
Решение:



Пусть $FG = x$. *Обозначим сторону квадрата ABKL через а, сторону квадрата* $DBHG$ *через* y, *тогда стороны квадрата AEFD будут равны* $x + y$.
Тогда
$$AB = AD + BD = x + 2y = a$$
Найдем периметр P многоугольника EFGHKL
$$P = 3a + 2(x + y) + x + 2y$$
$$= 3a + 2(x + 2y) + x = 5a + x$$
По условию $P = 27, a = 5$, *и*
$$x = P - 5a = 27 - 25 = 2$$

<u>Ответ:</u> 2.

<u>Задание 4</u> (20 баллов)

Гена купил Чебурашке два килограмма мандаринов и три килограмма апельсинов, потратив всего 800 рублей. При этом за мандарины он заплатил на 80 рублей больше, чем за апельсины. Старуха Шапокляк также купила Чебурашке мандарины и апельсины, причем за мандарины она заплатила в шесть раз меньше денег, чем за апельсины. Сколько стоил килограмм мандаринов и сколько килограмм апельсинов? Чего Шапокляк купила больше, мандаринов или апельсинов и во сколько раз?

<u>Решение:</u>

Так как 2 кг мандаринов на 80 рублей дороже, чем 3 кг апельсинов, то 6 кг апельсинов будут стоить 800 – 80 = 720 рублей, и один килограмм апельсинов будет стоить 720 : 6 = 120 рублей. Тогда 2 кг мандаринов стоят $120 \cdot 3 + 80 = 440$ *рублей, а один килограмм мандаринов стоит 220 рублей.*

Если Шапокляк купила x *килограмм мандаринов и заплатила за них* $220 \cdot x$ *рублей, то за апельсины она заплатила* $6 \cdot 220 \cdot x$ *рублей.*

Так как один килограмм апельсинов стоит 120 рублей, а за все апельсины она заплатила $6 \cdot 220 \cdot x$ *рублей, то Шапокляк купила* $\frac{6 \cdot 220 \cdot x}{120} = 11x$ *килограмм апельсинов. Разделив* $11x$ *на* x*, получим, что Шапокляк купила в 11 раз больше апельсинов.*

<u>Ответ:</u> килограмм мандаринов стоил 220 рублей, килограмм апельсинов – 120 рублей. Шапокляк купила в 11 раз больше апельсинов.

<u>Задание 5</u> (20 баллов)

Улитка должна проползти 50 метров. В первый день она преодолела половину пути, очень устала. Во второй день она проползла половину оставшегося пути. Каждый день улитка проползает половину пути предыдущего дня. Через сколько дней ей останется проползти не более 5 см?

<u>Решение.</u>

Через n *дней улитке останется проползти не более 5 см, а оставшаяся часть пути равна* $\frac{5000}{2^n}$, поэтому получаем неравенство: $\frac{5000}{2^n} \leq 5 \leftrightarrow \frac{1000}{2^n} \leq 1, \quad n = 10,$ *так как* $2^{10} = 1024$

<u>Ответ:</u> через 10 дней

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год**

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 7 **ШИФР _______________**

Задание 1 (20 баллов)

Готовясь к экзамену, Игорь ежедневно в течение трех недель решает одинаковое количество тестов. После проверки он узнал, что решил правильно 30 тестов, что составляет от 30 % до 40 % всех заданий. Сколько всего тестов решал Игорь?

Решение

Пусть Игорь решал x тестов в день, тогда всего он решил 21x задач за три недели. Известно, что только 30 тестов он решил верно, что составляет $\frac{30}{21x} \cdot 100\%$ *всех задач. По условию* $\frac{30}{100} \leq \frac{30}{21x} \leq \frac{40}{100} \rightarrow \frac{100}{40} \leq \frac{21x}{30} \leq \frac{100}{30} \rightarrow$ $75 \leq 21x \leq 100$*; и так как* $x \in \mathbb{N}$ *,* то $x = 4 \rightarrow 21x = 84$.

Ответ: 84

Задание 2 (20 баллов)

Под Новый год благотворительный фонд должен разослать 2023 поздравления. Сотрудники фонда ежедневно отправляют одинаковое число поздравлений. После очередной рассылки выяснилось, что еще 160 поздравлений не разослано. Сколько дней и по сколько поздравлений в день рассылали, если для этого им потребовалось больше 5, но меньше 12 дней?

Решение

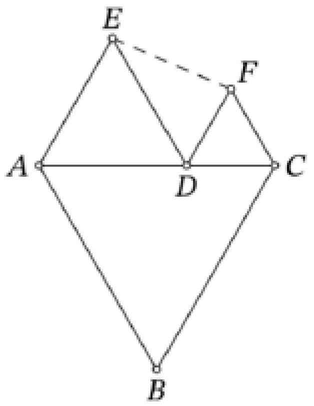
$2023 = 160 + 1863$

Пусть x *дней фонд рассылает поздравления, посылая каждый день по* y *штук. Всего за* x *дней было разослано* xy *поздравлений. Так как не было отослано 160 поздравлений, то* $2023 = xy + 160$, $xy = 1863$,
$xy = 23 \cdot 3^4$*. По условию задачи* $x = 9, y = 207$.
То есть за 9 дней разослано 1863 поздравления и каждый день рассылалось по 207 поздравлений.

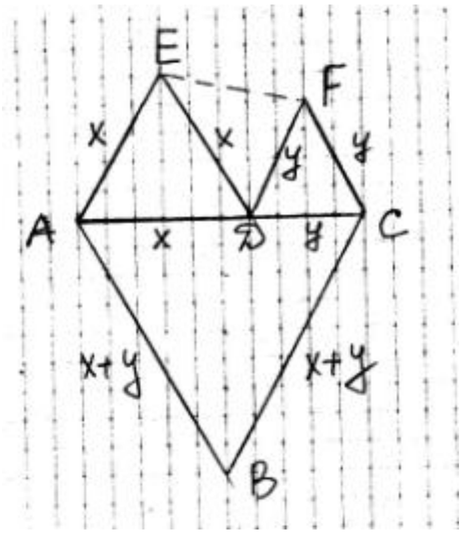
Ответ: 9 дней, 207 поздравлений

Задание 3 (20 баллов)

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D. На отрезках AD и DC во внешнюю сторону от исходного треугольника построены равносторонние треугольники ADE и DCF. Известно, что периметр треугольника DEF равен 19, а периметр пятиугольника $ABCFE$ равен 43.Найдите длину отрезков AB и EF.



Решение:



Обозначим сторону треугольника ADE через x, а сторону треугольника DCF через y,тогда сторона треугольника ABC будет равна $x+y$.
Периметр треугольника DEF равен
$P_{DEF} = x + y + EF = 19$,
откуда $EF = 19 - (x + y)$
Периметр пятиугольника $ABCFE$
$P_{ABCFE} = 3(x + y) + EF = 43$, *тогда*
$3(x + y) + 19 - (x + y) = 43, \quad 2(x + y) = 24$
и $AB = x + y = 12$,
$EF = 19 - (x + y) = 19 - 12 = 7$

Ответ: $AB = 12, EF = 7$

Задание 4. (20 баллов)

Число x округлили до тысячных, полученное число округлили до сотых, и полученное число округлили до десятых. Получили 0,7. Какое наименьшее значение могло принимать x?

Решение:

Рассмотрим все округления в обратном порядке. После второго округления число не может быть меньше, чем 0,65. После первого – не может быть *меньше чем 0,645. Тогда изначально число x не может быть меньше числа 0,6445. Получили цепочку округлений с конца*

$$0{,}7 \to 0{,}65 \to 0{,}645 \to 0{,}6445$$

<u>Ответ:</u> 0,6445

<u>Задание 5</u> (20 баллов)

Родители двух 7-х классов школы купили в магазине одинаковые ручки для своих детей в начале учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 11. Родители 7-а класса купили ручек ровно на 858 рублей, родители 7-б класса - ровно на 1683 рубля. Сколько суммарно ручек они купили?

<u>Решение.</u>

$858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$

$1683 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$

Цена ручки х является общим делителем чисел 858 и 1863, то есть может быть равна 3, 11 или 33. По условию $x = 33$, тогда

$\frac{858}{33} + \frac{1683}{33} = 26 + 51 = 77$ *ручек.*

<u>Ответ:</u> 77

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

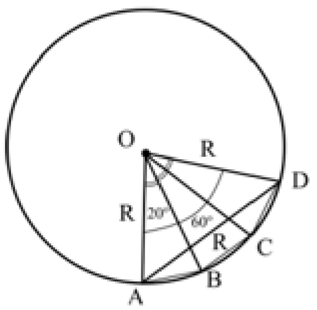
ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 8 **ШИФР _______________**

<u>Задание 1</u> (20 баллов)

Дана окружность с центром в точке O и радиусом R. На окружности отметили две точки A и B так, что $\angle AOB = 20°$. Докажите, что длина отрезка AB больше чем $\frac{1}{3}$ радиуса.

<u>Решение:</u>



Построим два угла равных $20°$ $\angle BOC$ и $\angle COD$. *Получили* $\angle AOD = 60°$. *Треугольник* $AOD -$ *равносторонний* $AD = R$. *Также* $AB = BC = CD$. *Отрезок* $AD -$ *кратчайшее расстояние между точками* A и D, *поэтому* $AD < 3AB$ *(ломаная длинней отрезка, соединяющего ее концы). Откуда* $AB > \frac{1}{3}R$.

<u>Задание 2</u> (15 баллов)

Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил бы четверть второго танкера, то работа бы заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

<u>Решение:</u>

Производительность каждого насоса обозначим через $x\ ^{\text{м}^3}/_{\text{ч}}$, *объем 1-го танкера* $V_1(\text{м}^3), 2$ *–го танкера* $V_2(\text{м}^3)$, *тогда* $4x \cdot t_1 = V_1$, $4x \cdot t_2 = \frac{1}{3}V_2$, *где* t_1 и t_2 *–время заполнения четырьмя насосами первого и треть второго танкеров соответственно, что по условию равно* $t_1 + \ t_2 = 11$.

Аналогично, $3x \cdot t_1' = V_1$, $x \cdot t_2' = \frac{1}{4}V_2$, *где* $t_1', t_2' -$ *время заполнения тремя насосами первого и одним четверть второго танкера соответственно, что по условию равно* $t_1 + \ t_2 = 18$.

$$\begin{cases} \frac{V_1}{4x} + \frac{V_2}{12x} = 11 \\ \frac{V_1}{3x} + \frac{V_2}{4x} = 18 \end{cases}, \begin{cases} 3V_1 + V_2 = 11 \cdot 12x \\ 4V_1 + 3V_2 = 18 \cdot 12x \end{cases}, \ 5V_2 = 10 \cdot 12x, V_2 = 24x.$$

Три насоса заполнят второй танкер за $\frac{V_2}{3x} = \frac{24x}{3x} = 8$ *часов.*

<u>Ответ:</u> за 8 часов

<u>Задание 3</u> (15 баллов)

Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2023$. Решите уравнение $f(3 - x) = f(3x - 1)$

<u>Решение:</u>

Так как $f(3 - x) = (3 - x)^2 - 5(3 - x) + 2023$ *и*
$f(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 5(3x - 1) + 2023$, а *по условию*
$f(3 - x) = f(3x - 1)$,
то $(3 - x)^2 - 5(3 - x) + 2023 = (3x - 1)^2 - 5(3x - 1) + 2023$, *упростив, получим уравнение* $2x^2 - 5x + 3 = 0$, *корни которого 1 и 1,5.*

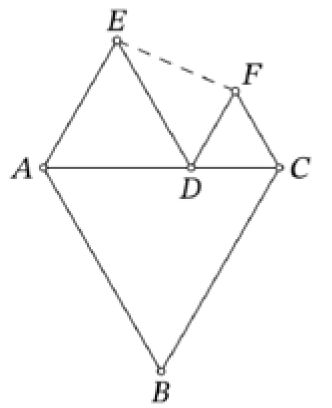
<u>Ответ:</u> 1 и 1,5.

<u>Задание 4</u> (25 баллов)
На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2023. Случайно стерли одно из чисел. Выяснилось, что среднее арифметическое оставшихся чисел совпадает с удаленным числом. Какое число случайно стерли?

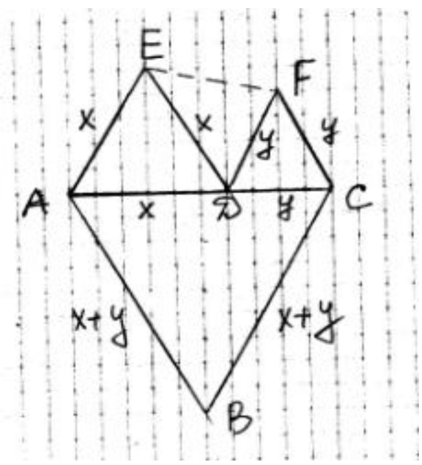
<u>Решение:</u>
$1+2+3+\cdots+2023=S, x-$ *удаленное число, тогда* $\frac{S-x}{2022}=x;$
$S=\frac{2023\cdot 2024}{2}, x=1012$

<u>Ответ:</u> 1012

<u>Задание 5</u> (25 баллов)
На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D. На отрезках AD и DC во внешнюю сторону от исходного треугольника построены равносторонние треугольники ADE и DCF.
1) При каком отношении $AD:DC$ треугольник DEF будет прямоугольным?
2) При каком отношении $AD:DC$ отношение площадей треугольников ABC и DEF будет минимальны?



<u>Решение:</u>



Обозначим сторону треугольника ADE *через* x, *а сторону треугольника* DCF *через* y, *тогда сторона треугольника* ABC *будет равна* $x+y$.

Так как треугольники ADE *и* DCF *равносторонние, то угол* $EDF=60°$. *Обозначим* $\angle DEF=\alpha, \angle EFD=\beta$.
1) Пусть треугольник $DEF-$ *прямоугольный,* $AD=x, DC=y$ *и как видно из чертежа* $x>y$.
Тогда $\angle EFD=90°$, $\angle DEF=30°$, *откуда*

$$x=2y \text{ и } \frac{AD}{DC}=\frac{x}{y}=\frac{2y}{y}=2.$$

2) Находим площади треугольников ABC *и* DEF.
$S_{ABC}=\frac{1}{2}(x+y)^2 sin60°, S_{DEF}=\frac{1}{2}xy\cdot sin60°$, *их отношение равно*
$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\geq 4$, *так как* $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$,
Поэтому отношение площадей минимально при $x=y=2$, *будет равно 4. Отношение* $\frac{AD}{DC}=\frac{x}{y}=1$

Ответ: 1) $\frac{AD}{DC} = 2$, 2) $\frac{AD}{DC} = 1$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 9 **ШИФР ________________**

Задание 1 (20 баллов)

Число 38 разложите на три слагаемых так, что первое относится ко второму как $2:3$, а произведение первого слагаемого на третье минус квадрат второго было бы максимальным. Найдите эти слагаемые.

Решение.

Пусть $x, y, z -$ *первое, второе и третье слагаемые соответственно.*

Надо *найти такие* x, y, z, *при которых выражение* $xz - y^2$ *было бы максимальным. По условию* $x + y + z = 38$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$,

откуда $x = \frac{2}{3}y$; $z = 38 - x - y = 38 - \frac{2}{3}y - y = 38 - \frac{5}{3}y$.

Имеем, $xz - y^2 = \frac{2}{3}y\left(38 - \frac{5}{3}y\right) - y^2 = -\frac{19}{9}y^2 + \frac{76}{3}y$.

Рассмотрим функцию $f(y) = -\frac{19}{9}y^2 + \frac{76}{3}y$. *Это парабола, у которой старший коэффициент* $-\frac{19}{9} < 0,$ поэтому она *достигает своего максимального значения в вершине, поэтому* $y_0 = -\frac{b}{2a}$.

В данном случае $a = -\frac{19}{9}, b = \frac{76}{3}$ *и* $y_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{76}{6} \cdot \left(-\frac{9}{19}\right) = 6$, *то есть* $y = y_0 = 6$, *тогда* $x = 4, z = 38 - 4 - 6 = 28$

Получили три слагаемых 4, 6 и 28.

Ответ: *4, 6 и 28*

Задание 2 (20 баллов)

Решите систему уравнений $\begin{cases} |x^4 - 625x^2| \neq x^4 - 625x^2, \\ |6x^2 - 257x + 251| + 6x^2 - 257x + 251 = 0. \end{cases}$

Решение:

Данное уравнение равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^4 - 625x^2 < 0 \\ 6x^2 - 257x + 251 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-25)(x+25) < 0 \\ 6(x-1)(x - \dfrac{251}{6}) \le 0 \end{cases}$$

Решение первого неравенства $x \in (-25; 0) \cup (0, 25)$

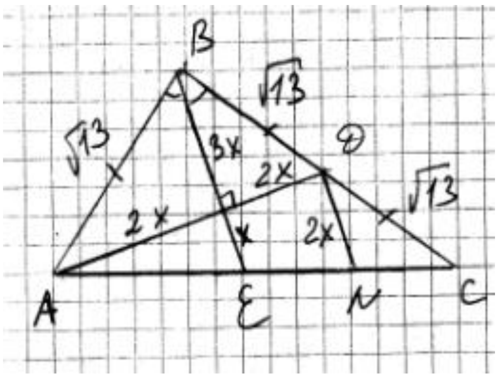
Решение 2-го неравенства $x \in \left[1; \frac{251}{6}\right]$, *откуда* $1 \le x < 25$.

<u>Ответ:</u> [1;25)

<u>Задание 3</u> (20 баллов)

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$.

<u>Решение:</u>



Рассмотрим ΔABD. *Так как биссектриса перпендикулярна основанию, то* $\Delta ABD -$ *равнобедренный,* $AB = BD = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$. *Обозначим* $K -$ *точку пересечения медианы и биссектрисы.*

Так как $AD -$ медиана, *то площади треугольников* ABD и ADC *равны,*

$S_{ABC} = 2S_{ABD}$.

Проведем $DN \parallel BE$. $DN -$ *средняя линяя* $\Delta BEC \Rightarrow DN = \frac{1}{2}BE$.

$KE -$ *средняя линяя* $\Delta ADN \Rightarrow KE = \frac{1}{2}DN$

Пусть $KE = x$, *тогда* $DN = 2x, BE = 4x, BK = 3x, AK = 2x$.

Так как $BE = AD$, *то* $AD = 4x$ *и* $AK = 2x$.

Рассмотрим ΔABK . *По теореме Пифагора имеем* $AB^2 = AK^2 + BK^2$,

$9x^2 + 4x^2 = 13, x = 1.\ AD = 4x = 4, BK = 3x = 3$

$S_{ABC} = 2S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BK = 12$.

<u>Ответ:</u> 12

<u>Задание 4</u> (15 баллов)

Решите уравнение $(x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 20x^2$.

<u>Решение:</u>

Заметим, что $x \ne 0$.

Разделим обе части уравнения на x^2. *Получим*

$$(x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 20x^2 \Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(3x - 10 + \frac{3}{x}\right) = 20$$

Обозначим $x + \frac{1}{x} = t$

$$(t-1)(3t-10)=20 \Leftrightarrow\ 3t^2-13t-10=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=5 \\ x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+1=0 \\ 3x^2+2x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$$

Второе уравнение системы не имеет решений.

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

Задание 5 (25 баллов)

При каких натуральных m и n $(n>m)$ выражение

$$\sqrt{n(n+3)(n+6)(n+9)+81}-\sqrt{m(m+3)(m+6)(m+9)+81}$$

делится на 13?

Решение.

Перемножим в обоих подкоренных выражениях первый множитель с четвертым, третий - со вторым, получим

$$\sqrt{n(n+3)(n+6)(n+9)+81}-\sqrt{m(m+3)(m+6)(m+9)+81}=$$
$$=\sqrt{(n^2+9n)(n^2+9n+18)+81}-\sqrt{(m^2+9m)(m^2+9m+18)+81}=$$
$$=\sqrt{(n^2+9n)^2+18(n^2+9n)+9^2}-\sqrt{(m^2+9m)^2+18(m^2+9m)+9^2}=$$
$$=\sqrt{(n^2+9n+9)^2}-\sqrt{(m^2+9m+9)^2}=(n^2+9n+9)-(m^2+9m+9)=$$
$$=(n-m)(n+m+9)$$

Выражение $(n-m)(n+m+9)$ *делится на 13, если хотя бы один из множителей делится на 13:*

1) $n-m=13k, \qquad n=m+13k; m,k\in\mathbb{N}$
2) $n+m+9=13k, \qquad n=13k-m-9>0; \quad m,k\in\mathbb{N}$

Ответ: $n=m+13k; m,k\in\mathbb{N}$; $\quad n=13k-m-9>0;\ m,k\in\mathbb{N}$.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 10 **ШИФР _______________**

<u>Задание 1</u> (15 баллов)

Числа x и y удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - 2023x = y^3 - 2023y, \\ x \cdot y = 2022. \end{cases}$$

Найти $x^2 + y^2$.

<u>Решение:</u>

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^3 - y^3 = 2023(x - y) \leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 2023(x - y) = 0$$
$$\leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2023) = 0$$

Рассмотрим два случая

1) $\begin{cases} x = y \\ x \cdot y = 2022 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 2022 \\ y^2 = 2022 \end{cases} \to x^2 + y^2 = 4044$

2) $\begin{cases} x \neq y \\ x^2 + xy + y^2 - 2023 = 0 \\ x \cdot y = 2022 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \neq y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \cdot y = 2022 \end{cases} \to \begin{cases} (x + y)^2 = 4045 \\ (x - y)^2 = -4043 \end{cases}$

Получили систему, которая не имеет решений.

Ответ: $x^2 + y^2 = 4044$

<u>Задание 2</u> (20 баллов)

Решите уравнение: $2arcsinx + arccos\sqrt{3}x = \frac{\pi}{2}$

<u>Решение:</u>

ОДЗ: $-1 \leq \sqrt{3}x \leq 1, -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\pi}{2} - arccos\sqrt{3}x = 2arcsinx \Rightarrow sin\left(\frac{\pi}{2} - arccos\sqrt{3}x\right) = sin(2arcsinx) \Longrightarrow$$
$$cos\left(arccos\sqrt{3}x\right) = 2sin(arcsinx) \cdot cos(arcsinx) \Rightarrow$$
$$\sqrt{3}x = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

Решая полученное иррациональное уравнение, находим

$3x^2 = 4x^2(1 - x^2)$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3 = 4(1 - x^2) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$ *все три корня входят в ОДЗ.*

<u>Ответ:</u> $x = 0, x = \pm\frac{1}{2}$.

<u>Задание 3</u> (25 баллов)

Функция f(u), не являющаяся постоянной, удовлетворяет равенству $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x, y. Найдите значение $f(2023)$, если $f(2021) \cdot f(-2022) = 2$.

Решение:

Пусть x *−натуральное число. Тогда* $f(x+1)=f(x)\cdot f(1)$

Полагая $x=1,2,\dots$ *получим последовательность*

$f(2)=f(1)\cdot f(1)=f(1)^2, f(3)=f(2)\cdot f(1)=f(1)^3,\dots,f(n)=f(1)^n$, *то есть получили геометрическую прогрессию со знаменателем* $q=f(1)$.

Таким образом, для натуральных x *значение* $f(x)=f(1)^x$. *Полагая* $y=0$, *получим* $f(x)=f(x)\cdot f(0)$. *Если* $f(\tilde{x})=0$ *для некоторого* $\tilde{x}$, *то* $f(x)\equiv 0$, *что противоречит условию (* $f(x)$ *не является постоянной). Тогда* $f(0)=1$.

По условию $1=f(x-x)=f(x)\cdot f(-x)\to f(-x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(1)^x}$, *то есть* $f(-x)=f(1)^{-x}$. *Это свойство показывает на то, что* $f(x)=f(1)^x$ *для всех целых* x.

Тогда $f(2021)\cdot f(-2022)=f(1)^{2021}\cdot f(1)^{-2022}=f(1)^{-1}=\frac{1}{f(1)}=2$, *откуда следует, что* $f(1)=\frac{1}{2}$ *и* $f(2023)=f(1)^{2023}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}=2^{-2023}$.

Ответ: $f(2023)=2^{-2023}$

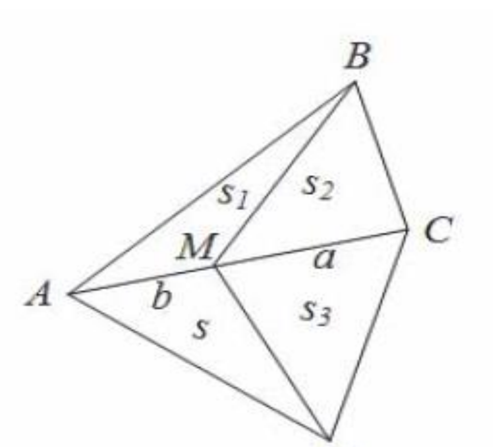
Задание 4 (15 баллов)

Точка M, расположенная на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, соединена отрезками с его вершинами. Площади образовавшихся треугольников MAB, MBC, MCD равны 8, 25, 20 соответственно. Найти площадь четвертого треугольника MAD.

Решение:

Пусть S *−площадь треугольника* MAD,

$CM=a, AM=b$. *Тогда треугольники* MAB и MBC *имеют равные высоты и их отношение их площадей равно отношению длин их оснований:*



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b}{a}$$

Аналогично, $\frac{S}{S_3}=\frac{b}{a}$. *Получим пропорцию* $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S}{S_3}\to\frac{8}{25}=\frac{S}{20}\to S=\frac{8\cdot 20}{25}=\frac{32}{5}$.

Ответ: $S=\frac{32}{5}$

Задание 5 (25 баллов)

Решите неравенство $(5-\cos 2(x+y)+4\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\le 2$

Решение:

$(4 + 2sin^2(x + y) + 4sin(x + y)) \cdot log_2(3^x + 3^{-x}) \le 2$

$(2 + sin^2(x + y) + 2\,sin(x + y)) \cdot log_2(3^x + 3^{-x}) \le 1$

$((sin(x + y) + 1)^2 + 1) \cdot\ log_2\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) \le 1$

Так как $(sin(x + y) + 1)^2 + 1 \ge 1,$ $3^x + \frac{1}{3^x} \ge 2,$ $log_2\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) \ge 1,$ *для любых значений* x и y, *то неравенство*

$$((sin(x + y) + 1)^2 + 1) \cdot\ log_2\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) \le 1$$

справедливо только для тех x и y, *для которых*

$$\begin{cases} (sin(x + y) + 1)^2 + 1 = 1 \\ log_2\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} sin(x + y) = -1 \\ 3^x + \frac{1}{3^x} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \\ x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}.$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 11 **ШИФР** _______________

Задание 1 (20 баллов)

На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2023. Случайно стерли одно из чисел. Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел совпасть с одним из оставшихся на доске чисел? Если да, то какое число было стерто?

Решение:

$$1 + 2 + \cdots + 2023 = \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2023 \cdot 1012 = S$$

Если стереть число x, *то* на доске останется 2022 числа с суммой *S-x.*

Тогда

$$y = \frac{2023 \cdot 1012 - x}{2022} = 1012 + \frac{1012 - x}{2022}.$$

Так как y – натуральное число, то x=1012, но тогда y=1012, то есть равно удаленному числу.

<u>*Ответ:*</u> *не может*

<u>Задание 2</u> (20 баллов)

При каких значениях параметров A и B уравнение

$x^2 + 4x \cdot cosA + y^2 - 2y \cdot cosB + 5 = 0$

имеет решения. Найти эти решения.

<u>*Решение:*</u>

Преобразуем данное уравнение

$x^2 + 4x \cdot cosA + 4cos^2A - 4cos^2A + y^2 - 2y \cdot cosB + cos^2B - cos^2B + 5 = 0$

$(x^2 + 4x \cdot cosA + 4cos^2A) + (y^2 - 2y \cdot cosB + cos^2B) + 4 - 4cos^2A + 1 - cos^2B = 0$

$(x + 2cosA)^2 + (y - cosB)^2 + 4sin^2A + sin^2B = 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x + 2cosA = 0 \\ y - cosB = 0 \\ sinA = 0 \\ sinB = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2cosA \\ y = cosB \\ A = \pi k, k \in \mathbb{N} \\ B = \pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2(-1)^k \\ y = (-1)^n \\ A = \pi k, k \in \mathbb{N} \\ B = \pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

<u>*Ответ:*</u> $A = \pi k, B = \pi n, n, k \in \mathbb{N}$, $x = -2(-1)^k, y = (-1)^n$

<u>Задание 3</u> (20 баллов)

Сколько точек плоскости с натуральными координатами попадает на график кривой $x^2 + 2023 = 16y^2$

при условии, что обе координаты – простые числа.

<u>*Решение:*</u>

Очевидно, что если точка с координатами $(x_0; y_0)$ *находится на графике данной кривой, то и точки* $(-x_0; y_0), (x_0; -y_0), (-x_0; -y_0)$ *также находятся на этой линии. Перенесем второе слагаемое из левой части направо*

$$16y^2 - x^2 = 2023$$

и разложим левую и правую части на множители. Получим уравнение

$$(4y - x)(4y + x) = 1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17.$$

Возможны следующие случаи

1) $\begin{cases} 4y - x = 1 \\ 4y + x = 2023 \end{cases} \to x = 1011$ - *не является простым числом;*

2) $\begin{cases} 4y - x = 2023 \\ 4y + x = 1 \end{cases} \to x < 0$ *;*

3) $\begin{cases} 4y - x = 7 \\ 4y + x = 289 \end{cases} \rightarrow x = 141$ - *не является простым числом;*

4) $\begin{cases} 4y - x = 289 \\ 4y + x = 7 \end{cases} \rightarrow x < 0$;

5) $\begin{cases} 4y - x = 17 \\ 4y + x = 119 \end{cases} \rightarrow x = 51$ - *не является простым числом;*

6) $\begin{cases} 4y - x = 119 \\ 4y + x = 17 \end{cases} \rightarrow x < 0$.

<u>Ответ:</u> на графике заданной кривой таких точек нет

<u>Задание 4</u> (20 баллов)

Найдите точки максимума и минимума функции $y(x)$, которая определяется уравнением $3arcsinx + arccosy = \frac{\pi}{2}$

<u>Решение:</u>

$3arcsinx = \frac{\pi}{2} - arccosy$, *тогда*

$sin(3arcsinx) = sin\left(\frac{\pi}{2} - arccosy\right)$

$sin(3arcsinx) = cos(arccosy)$

Преобразуем левую часть уравнения по формуле $sin\,3\alpha = 3sin\alpha - 4cos^3\alpha$, *считая* $\alpha = arcsinx$.

Получим $3sin(arcsin\,x) - 4sin^3\,(arcsinx) = cos(arccos\,y)$, *откуда*

$y = 3x - 4x^3$

$y' = 3 - 12x^2 = 3(1 - 4x^2) = 3(1 - 2x)(1 + 2x)$

$y' = 0 \leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

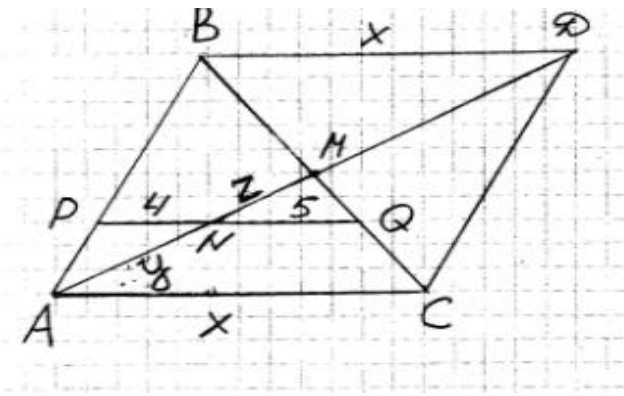
Так как при переходе через точку $x = -\frac{1}{2}$, *производная меняет с минуса на плюс, а при переходе через точку* $x = \frac{1}{2}$, *производная меняет с плюса на минус, то* $x = -\frac{1}{2}$ *—точка минимума,* $x = \frac{1}{2}$ *—точка максимума.*

<u>Ответ:</u> $x = -\frac{1}{2}$ *—точка минимума,* $x = \frac{1}{2}$ *—точка максимума.*

<u>Задание 5</u> (20 баллов)

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Медиана AM пересекает отрезок PQ в точке N. Длины отрезков PN и NQ равны 4 и 5. Найти длину стороны АС.

<u>Решение:</u>



Обозначим сторону $\text{AC} = x$, $AN = y, MN = z,$ *по условию* $PN = 4, NQ = 5$.
Достроим треугольника ABC *до параллелограмма, тогда*

$$BD = AC = x$$

Так как ΔABD подобен ΔAPN ($PQ \parallel BD$), *то*

$$\frac{BD}{PN} = \frac{AD}{AN} \to \frac{x}{4} = \frac{2(y+z)}{y} \to y + z = \frac{xy}{8} \; (1)$$

А из подобия треугольников AMC и MNQ *следует что*

$$\frac{AC}{NQ} = \frac{AM}{MN} \to \frac{x}{5} = \frac{y+z}{z} \to y + z = \frac{xz}{5} \; (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{y}{z} = \frac{8}{5}$

$\frac{x}{5} = \frac{y+z}{z} = \frac{y}{z} + 1 = \frac{13}{5}$, *откуда* $x = 13$

<u>Ответ:</u> $\text{AC} = 13$