Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Донской государственный технический университет»

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2021/2022 учебный год**

Σ 45

1	2	3	4	5
20	20	0	0	5

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 10

ШИФР 6110м8

Задание 1.
Три друга – Дима, Вова и Игорь – преподают геометрию, комбинаторику и теорию чисел; один из них работает в Санкт- Петербурге, другой – в Орле и третий – в Ростове-на-Дону. Дима работает не в Орле, Вова – не в Санкт-Петербурге, петербуржец преподает теорию чисел, орловец – не комбинаторику, Вова – не геометрию. Какой предмет преподает каждый из них?

Задание 2.
Дано выражение $A = xy + yz + zx$, где $x, y, z -$ целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1) \cdot A -$ квадрат целого числа.

Задание 3.
Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что угол $\angle ADM = \angle MAD = 15°$ Найдите угол BCM и радиус вписанной и описанной около треугольника МСВ окружностей, если сторона квадрата равна 1.

Задание 4.
При каких простых значениях натурального числа р число $8p^2+1$ также простое?

Задание 5.
Найдите все решения уравнения
$$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0$$

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 6110М8

20б

№1.

	геом.	комб.	ТЧ.	СП	Орёл	Р-D
Дима	X	X	✓	✓	X	X
Вова	X	✓	X	x	X	✓
Игорь	✓	X	X	X	✓	X

СП-ТЧ от Дима/Игорь

геом: Дима / Игорь

комб: не дима!

I Дима не живет в Орле ⇒ он может преподавать комбинаторику. Вова - не геометр, не теор. чисел. ⇒ Вова - комбинатор

II Игорь - живет в орле! ⇒ не теор чисел, не комб ⇒ геомет

III Дима - СП, теор. чисел.

Ответ: Дима - теория чисел, Вова - комбинаторика, Игорь - геометрия.

№2. $\sqrt{xy+yz+zx}=n$, $n\in Z$, но $x, y, z \in Z$ (целые)

$A = xy+yz+zx = A_1$ ⇒ A - отрицательное число

Док-ть: $A\cdot(-1)$ - квадрат целого числа.

1) $xy+yz+zx = (x+1)(y-2)+(y-2)(z-2)+(z-2)(x+1)$

$xy+yz+zx = xy+y-2x-2+yz-2z-2y+4+zx-2x+z-2.$

$0 = y-2x-2z-2y-2x+z$

$0 = -4x-y-z$

$4x+y+z=0$

$4x=-y-z$

$x=-\frac{y+z}{4}$ ⇒

1) A - отриц. число, $A\neq 0$

$\sqrt{A(-1)}=|n|$, $n\in Z$

2) $4x+z+y=0$

1) $y=-4x-z=-4x+4x+y \Rightarrow y=y.$

$z = -4x-y = -(4x+y)$

$xy - y(4x+y) - (4x+y)x = A = A_1$

$xy-4yx-y^2-4x^2-yx = A = xy+yz+zx$

$y^2+4x^2+4yx = A(-1)$

$(y+2x)^2 = A(-1)$

2) $-\frac{y+z}{4}+yz+\frac{z(y+z)}{4}=$

$=\frac{-y+z+4yz}{4}-\frac{zy+z^2}{4}=$

$=\frac{-y+z+3yz-z^2}{4}=A$

$\underbrace{-z^2}_{a}+\underbrace{3yz+z}_{b}\underbrace{-y}_{c}=4A$

$D=(3yz+z)^2+4\cdot 4\cdot y=9y^2z^2+z^2+6yz^2+4y$

№3 ч:5

$(y(x-1))^2+(x-1)^2+y^2+1-4y|x-1|=0$

$$\begin{cases}(y(x-1))^2+(x-1)^2+y^2+1-4y(x-1)=0\\ x-1\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y(x-1))^2+(x-1)^2+y^2+1+4y(x-1)=0\\ x-1\leq 0\end{cases}$$

$1-x$

5б

1. $x-1\geq 0$ } ОДЗ ?
$x\geq 1.$

~~2. Пусть $(x-1)$~~

2. Пусть $(x-1)=t. \Rightarrow t\geq 1.$

$y^2\cdot t^2+t^2+y^2+1-4y\cdot t=0$

$y^2t^2+t^2+y^2=4yt-1.$

Пусть $t=1$. ($t\geq 1$ - одз)

$y^2+1+y^2=4y-1.$

$2y^2=4y-2$

$2y^2-4y+2=0$

$y^2-2y+1=0$

$D=4-4=0$

$y=\frac{2}{2}=1.$

~~$x\geq 1$~~ $x=1.$

1. $x-1<0$

$x<1.$

2. Пусть $(x-1)=t \Rightarrow t<1.$
Пусть $t=-1.$

3. $y^2t^2+t^2+y^2+1+4yt=0$

$y^2+1+y^2+1-4y=0$

$2y^2+1=4y-1.$

По аналогии: $y=1. \Rightarrow$

$x=0$

НО: Пр-ко:

① Пусть $x=4.$

~~$9y^2+9+y^2+1-12y=0$~~

~~$10y^2+10-12y=0$~~

~~$D=144+400=544$~~ $\sqrt{D}$

нет в целых числах

544	2
272	2
136	2
68	2
34	2
17	17
	0

$\sqrt{544}$ $32\cdot 17$

22:01

Ответ: $(1;1)$; $(0;1)$

ч. 4

Об

$p\in N$, $8p^2+1$ - простое $\Rightarrow \frac{8p^2+1}{1}$ / $\frac{8p^2+1}{8p^2+1}$ $(=1)$

p - простое: 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...

1) $8p^2 \Rightarrow p^2$ - тогда простое число p - возводится в квадрат $\Rightarrow$, соотв, нужно такое простое число p, чтоб при возведении в чётную степень, оно оставалось простым.

$p=$ ~~0~~ $1.$ ~~Пр~~ Проверим: 1) $p=1$, $8\cdot 1+1=9$ - не простое число, тогда: получили что в выр-и $8p^2+1 \Rightarrow p^2$ - не простое число

2) $8p^2+1$ - нечётное число априори., $8p^2$ - чётное
пусть $8p^2+1=A.$

$+\begin{matrix}320\\72\end{matrix}$
392

$p=3 \Rightarrow$ $8p^2+1$ - простое
$p=2 \Rightarrow$ A - простое ?
$p=5 \Rightarrow$ A - простое
$p=7 \Rightarrow$ A - простое
$\Rightarrow$:

$8\cdot 4+1=33$ - не просто

Ответ: $(8p^2+1)$ - A - простое при любом простом натуральном значении p, но $p\neq 1$.

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 6110 М8

~~№3~~ №2.

1) A - отриц. число

2) $\sqrt{A(-1)} = |n|,\ n \in Z$

3) $A \neq 0,\ A = xy + yz + zx\ (x, y, z \in Z)$

4) $\underbrace{xy + yz + zx}_{A} = \underbrace{(x+1)(y-2)+(y-2)(z-2)+(z-2)(x+1)}_{A'}$

$A = A'$

$\cancel{xy} + \cancel{yz} + \cancel{zx} = \cancel{xy} + y - 2x - \cancel{2} + \cancel{yz} - 2z - 2y + \cancel{4} + \cancel{zx} + z - 2x - \cancel{2}$

$0 = y - 2x - 2z - 2y + z - 2x$

$0 = -4x - z - y$

$4x + z + y = 0 \Rightarrow z = -(4x + y)$

Если $z = -4x - y = -1 \cdot (4x + y)$, получим:

$xy - y(4x+y) - (4x+y)x = A$

$\cancel{xy} - 4yx - y^2 - 4x^2 - \cancel{yx} = A$

$-4yx - y^2 - 4x^2 = A \ / \cdot(-1)$

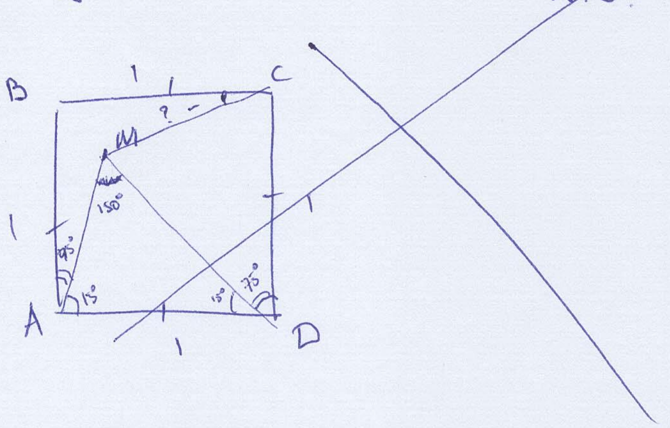
$4yx + y^2 + 4x^2 = A(-1)$

$(y + 2x)^2 = A(-1),\ y, x \in Z \Rightarrow$

$A(-1)$ - квадрат целого числа, что и требовалось доказать.

20б

№3.



0б