

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ
2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

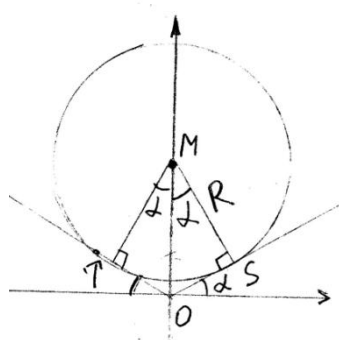
КЛАСС 9

Вариант 1

Задание 1 (20 баллов)

В график функции $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |x|$ вписана окружность радиуса R . Найти площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и графиком функции.

Решение:



$$OS = R \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{OMS} = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{OTMS} = 2S_{OMS} = R^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{\text{сек}MTS} = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = R^2 \alpha$$

$$S_{OTS} = S_{OTMS} - S_{\text{сек}MTS} = R^2 \operatorname{tg} \alpha - R^2 \alpha = R^2 (\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$$

$$\text{Функция } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |x| \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$S_{OTS} = R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Ответ: $R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} \right).$

Задание 2 (30 баллов)

В записи числа $\underbrace{(33 \dots 34)}_{n-1}^2$ есть единицы и пятерки. Каких цифр больше?

Решение:

$$\underbrace{33 \dots 34}_{n-1} = \underbrace{33 \dots 3}_n + 1 = 3 \cdot \left(\underbrace{11 \dots 1}_n \right) + 1$$

Пусть $\underbrace{11 \dots 1}_n = A$, тогда $\underbrace{33 \dots 34}_{n-1} = 3A + 1$, $9A = \underbrace{99 \dots 9}_n$, $9A + 1 = \underbrace{10 \dots 0}_n$,

получаем:

$$\begin{aligned} \underbrace{(33 \dots 34)}_{n-1}^2 &= (3A + 1)^2 = 9A^2 + 6A + 1 = A(9A + 6) + 1 = \\ &= A(9A + 1 + 5) + 1 = A(9A + 1) + 5A + 1 = \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_{n} \underbrace{00 \dots 0}_{n} + \underbrace{55 \dots 5}_{n} + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n} \underbrace{55 \dots 5}_{n-1} 6. \end{aligned}$$

Единиц на 1 больше, чем пятерок.

Ответ: единиц на одну больше.

Задание 3 (25 баллов)

На часах со стрелками 20 часов 25 минут 26 секунд. Через сколько минут минутная стрелка догонит часовую?

Решение:

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает $\left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right)$ часов, минутная стрелка показывает $\left(25 + \frac{26}{60}\right)$ минут.

Часовая стрелка имеет угловую скорость $30^\circ/\text{час}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол

$$\alpha = \left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right) \cdot 30^\circ/\text{час} = \left(240 + \frac{25}{2} + \frac{13}{60}\right)^\circ = 252\frac{43}{60}^\circ.$$

Минутная стрелка имеет угловую скорость $6^\circ/\text{мин}$, поэтому от момента времени 08ч 00м 00с она повернется на угол

$$\beta = \left(25 + \frac{26}{60}\right) \cdot 6^\circ/\text{мин} = \left(150 + \frac{26}{10}\right)^\circ = 152\frac{3}{5}^\circ.$$

Найдем угол между часовой и минутной стрелками

$$\alpha - \beta = 252\frac{43}{60} - 152\frac{3}{5} = 100\frac{7}{60}^\circ.$$

Пусть минутная стрелка догонит часовую через t минут. За это время

часовая стрелка (угловая скорость $30^\circ/\text{час} = \frac{1}{2}^\circ/\text{мин}$) повернется на угол $\frac{1}{2}t$, а

минутная стрелка (угловая скорость $6^\circ/\text{мин}$) - на $6t$; следовательно,

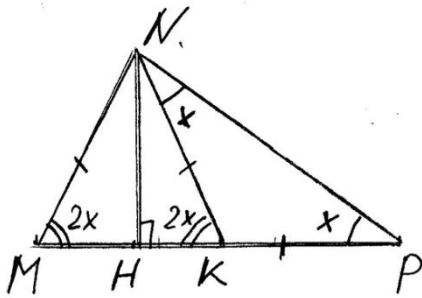
$$6t = \frac{1}{2}t + (\alpha - \beta), \quad 6t = \frac{1}{2}t + 100\frac{7}{60};$$

$$\frac{11}{2}t = 100\frac{7}{60} \rightarrow \frac{11}{2}t = \frac{6007}{60} \rightarrow t = \frac{6007}{11 \cdot 30} = 18\frac{67}{330} \text{ мин.}$$

Ответ: $18\frac{67}{330}$ мин.

Задание 4 (15 баллов)

В остроугольном треугольнике MNP проведена высота NH . Оказалось, что $PH = MN + MH$, Сколько градусов составляет угол NMP , если $\angle MNP = 78^\circ$.



Решение:

Отметим на отрезке PH точку K такую, что $MN = HK$, и т.к. $PH = MN + MH$, то $KP = MN$.

В $\triangle MNK$ высота NH совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, $MN = NK$, $\angle NMK = \angle NKM$.

Пусть $\angle KPN = x$, т.к. $KP = MN = NK$, то $\triangle NKP$ –

равнобедренный, $\angle KNP = \angle KPN = x$, тогда $\angle MKN = 2x$, $\angle MKN = 2x$, $\angle MNP = 180^\circ - 3x$. Поскольку $\angle MNP = 78^\circ$, то $78^\circ = 180^\circ - 3x$, $3x = 102^\circ$, $x = 34^\circ$, $\angle NMP = 2x = 68^\circ$

Ответ: 68°

Задание 5 (10 баллов)

Три программиста пишут совместную программу, причем каждый из них может ее написать за одно и то же время. Если эту программу будут писать два программиста, то они ее напишут за 3,5 часа. За какое время программисты напишут эту же программу все трое вместе?

Решение:

Объем программы примем за 1.

Пусть за x часов напишет эту программу один программист, тогда его производительность $\frac{1}{x}$. Так как два программиста напишут эту вместе за 3,5 часа, то получим уравнение

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot 3,5 = 1, \text{ откуда } x = 7.$$

Пусть t часов это время, за которое напишут программу все трое вместе, получим уравнение $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot t = 1$, откуда $t = \frac{7}{3}$ часа или за 2 часа 20 мин.

Ответ: за 2 часа 20 минут.