МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

ОЛИМПИАДА «Я-БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМУ ЭТАПУ ОЛИМПИАДЫ

2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА ДЛЯ **9** КЛАССА

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к освоению образовательных программ ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на верное и полное решение. Задания направлены на выявление интеллектуального потенциала, аналитических способностей и креативности мышления участников.

Очный этап олимпиады проводится только в письменной форме. Каждый участник олимпиады получает бланк с заданием одного из двух вариантов, содержащий 5 заданий. Задание считается выполненным, если получен верный ответ (ответы) на поставленный вопрос (вопросы). Задания олимпиады предполагают, что вопросов и вариантов ответа может быть несколько. Наибольшая итоговая сумма баллов, которой могут быть оценены ответы на все вопросы олимпиадного **варианта** при условии отсутствия в них ошибок, неправильных, неполных или неточных ответов, равна **100**. При отсутствии полного и верного ответа оцениваются отдельные этапы решения и характер допущенных ошибок, то есть возможен частичный зачёт баллов за неполный или неверный ответ за **задание**. Под неполным понимается ответ, содержащий правильные ответы не на все вопросы или варианты решения **задания**. Подсчёт итоговой оценки за весь **вариант** осуществляется путём суммирования баллов, выставленных за каждое из **заданий**.

На решение задач отборочного этапа Олимпиады отводится 3 часа 30 минут (три часа тридцать минут или 210 минут). Отсчет времени начинается с момента начала выполнения заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА

РАЗДЕЛ 1. Арифметика (теория чисел): структура и свойства натуральных чисел. Алгебра: преобразование алгебраических выражений.

Предполагает знание участником базовых понятий: одночлен, многочлен; подобные одночлены. Умение выполнять операции над многочленами. Предполагает умение участника анализировать текст и формировать математическую модель в задачах на движение и совместную работу (в форме уравнений и систем уравнений).

РАЗДЕЛ 2. Задачи на совместную работу. Круговое движение.

Предполагает знание участником базовых понятий: работа, производительность; угловая скорость движения

РАЗДЕЛ 3. Планиметрия: расчет элементов треугольников и четырехугольников

Предполагает знание участником важнейших фактов о взаимосвязи сторон и углов треугольников и четырехугольников, включая теоремы синусов и косинусов; уверенное владение признаками равенства и признаками подобия; знание основных фактов о вписанных и описанных окружностях.

РАЗДЕЛ 4. Метод координат

Предполагает знание участником базовых понятий: числовая ось, координата точки на числовой оси; структура прямоугольной системы координат, координаты точки на плоскости. Умение строить графики линейной и квадратичной функции и решать графически системы линейных уравнений.

Примеры заданий:

Задание 1: Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, где x и $y-$ натуральные числа . Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1-$ квадрат целого числа.

<u>Решение</u>

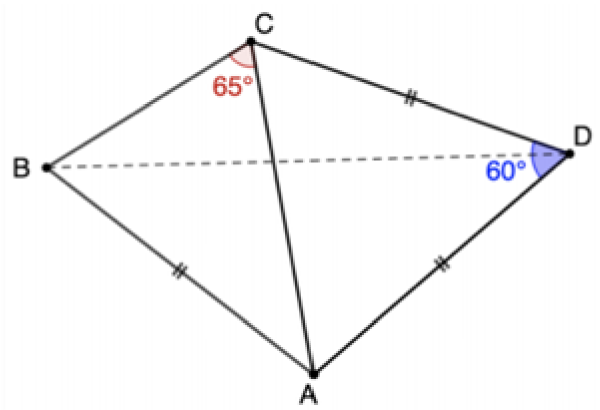
По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y-2}$, откуда $\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$.

Так как $x+y$ положительно, то $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$.

Тогда $\quad xy+1=x(x+2)+1=(x+1)^2$.

Задание 2: В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ADC=60°, AB=AD=DC.$ Найдите $\angle ABD,$ если $\angle BCA=65°.$ Ответ дайте в градусах.

Решение



Так как $\angle ADC = 60°$ и $AD = DC$, то $\angle ACD = \angle DAC = 60°$ и $AD = DC = AC$, откуда $AB = AC$ и $\angle ABC = \angle BCA = 65°$. По сумме углов ΔABC $\angle BAC = 180° - 130° = 50°$, тогда $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 110°$

Рассмотрим ΔABD

Так как $AB = AD,$ то $\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180° - 110°) = 35°$

Ответ: $35°$

Задание 3: Назовем натуральное число интересным, если произведение его цифр больше суммы его цифр. Найдите наименьшее интересное четырехзначное число.

Решение

Пусть $\overline{xyzw}$ – четырехзначное число. Четырехзначное число интересное,

если $x \cdot y \cdot z \cdot w > x + y + z + w.$

Заметим, что если в числе есть ноль, то произведение его цифр равно 0 и оно заведомо меньше суммы цифр. Поэтому, среди интересных нет четырехзначных чисел, имеющих цифры, равные нулю.

Рассмотрим числа вида $\overline{111a}$. Так как $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a < a + 2$, то эти числа тоже не могут быть интересными.

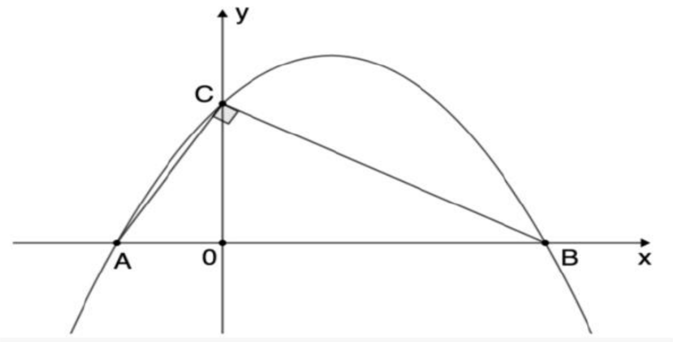
Рассмотрим числа вида $\overline{112a}$. Произведение их цифр равно $2a$, а сумма $4 + a$.

Если число интересное, то $2a > 4 + a$, $a > 4$. Наименьшее a, удовлетворяющее этому условию, это $a = 5$, и наименьшее интересное четырехзначное число это 1125.

Ответ: 1125.

Задание 4: На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A(-5; 0)$ и $B(20; 0) -$ пересечения данной параболы с осью Ox. Точка $C -$ пересечение данной параболы с осью $Oy -$ расположена выше оси Ox. Также известно, что $\angle ACB = 90°$. Найдите коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена.

<u>Решение</u>



Пусть $O -$ начало координат, тогда $CO -$ высота прямоугольного треугольника ABC.

По теореме о перпендикуляре, проведенном из вершины прямого угла на гипотенузу $CO = \sqrt{AO \cdot OB} = \sqrt{5 \cdot 20} = 10$,

Тогда точка C(0;10).

Для нахождения числа a подставим координаты точек A, B и C в уравнение параболы. Получим систему $\begin{cases} 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 400a + 20b + c \\ 10 = c \end{cases}$, решая которую находим $a = -0{,}1$.

Ответ: -0,1.

Задание 5: Сколько членов числовой последовательности 32, 28, 24, 20, 16..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132?

<u>Решение</u>

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

По условию, $S_n = 132$, первый член арифметической прогрессии $a_1 = 32$, разность $d = 28 - 32 = -4$.

n-ый член арифметической прогрессии имеет вид

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 32 + (n-1) \cdot (-4) = 36 - 4n$.

Тогда $132 = \frac{32+36-4n}{2} \cdot n, n^2 - 17n + 66 = 0, n_1 = 6, n_2 = 11$.

Ответ: 6 или 11.

Литература для подготовки

1. Виленкин Н.Я. и др. Математика. 5 класс. Учебник. Москва: Просвещение, 2024
2. Гальперин Г.А., Толпыго А.Л., под ред. А.Н.Колмогорова Московские математические олимпиады. Москва: Просвещение, 1986
3. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. Москва: Просвещение, 1966
4. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Математика, физика: сборник информационно-методических и образовательных материалов/Власова Е.А., Ирьянов Н.Я., Паршев Л.П., Струков Ю.А., Шишкина С.И.; Под ред. Н.Я. Ирьянова.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 315 с.
5. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Москва: Наука, 1988

Информационные ресурсы:

https://mathus.ru/

Пособия для подготовки к олимпиадам по математике

https://journal.school-olymp.ru/posobiya-dlya-podgotovki-k-olimpiadam-po-matematike

https://olimpiadnye-zadanija.ru/predmet/matematika/

http://ermolovskiy.ru/knigi-dlya-podgotovki-k-olimpiadam/

Видеокурсы по подготовке к олимпиаде по математике

http://cendop.bmstu.ru/userfiles/docs/Razbor_zadach_math_2012.ppt