1	2	3	4	5
5	5	15	0	0

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2022/2023 уч. год

Σ 25

математика
предмет

ШИФР 61-09-М-23

56

Задание 1

Обозначим первое слагаемое за 2x. Тогда второе равно 3x. Третье слагаемое обозначим за y.
Из этого:

$2x + 3x + y = 38 \Longrightarrow y = 38 - 5x$

Чтобы разность была максимальной, квадрат второго слагаемого должен быть меньше произведения первого на третье, т.е:

$9x^2 < 2x(38-5x)$

$9x^2 < 76x - 10x^2$

$19x^2 < 76x$

$x^2 < 4x$

$x^2 - 4x < 0$

$x(x-4) < 0$

Решим неравенство методом интервалов.
Найдем нули функции $f(x) = x(x-4)$ и отметим их на координатной прямой.

$x(x-4) = 0$

$x = 0$ или $x - 4 = 0$

$x = 4$

$+ \quad 0 \quad - \quad 4 \quad +$

$x \in (0;4)$ Т.е $x = 1, 2, 3.$

Следовательно, в этих случаях слагаемые равны:

I	II	III
1) 2	1) 4	1) 6
2) 3	2) 6	2) 9
3) 38-5=33	3) 38-10=28	3) 38-15=23

Разности:

I. $2 \cdot 33 - 9 = 57$ II. $4 \cdot 28 - 36 = \underline{76}$ III. $6 \cdot 23 - 81 = 5$

$76 > 57$

Значит, слагаемые равны: 4, 6, 28; Ответ: 4, 6, 28

Задание 4

15

$(x^2 - x + 1)\cdot(3x^2 - 10x + 3) = 20x^2$

$3x^4 - \underline{10x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x^3} + \underline{10x^2} - 3x + \underline{3x^2} - 10x + 3 = 20x^2$

$3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 20x^2$

$3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 - 20x^2 = 0$

$3x^4 - 15x^3 + 2x^3 \cancel{(+3x^2)} - 4x^2 + 2x - 15x + 3 = 0$

$3x^4 - 15x^3 + 2x^3 + 3x^2 - 10x^2 + 3x^2 + 2x - 15x + 3 = 0$

$3x^2(x^2 - 5x + 1) + 2x(x^2 - 5x + 1) + 3(x^2 - 5x + 1) = 0$

$(3x^2 + 2x + 3)(x^2 - 5x + 1) = 0$

$3x^2 + 2x + 3 = 0$ или $x^2 - 5x + 1 = 0$

$D = 4 - 3\cdot 4\cdot 3 = -32;\ D < 0$ нет корней

$D = 25 + 4\cdot 1\cdot 1 = 21;\ D > 0$, 2 корня

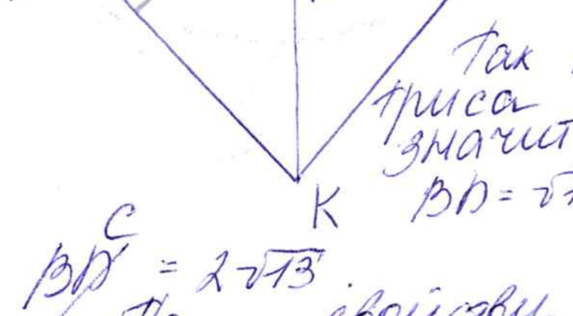
$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}$

$x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{21}}{2}$

Ответ: $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{21}}{2}$

Задание 3



56

Дано: $\triangle ABC$, BE – биссектриса; AD – медиана; $BE = AD$; $BE \perp AD$, $AB = \sqrt{13}$

Найти $S_{\triangle ABC}$ – ?

Решение:

Так как $BQ \perp AD$ и BE – биссектриса то $\triangle ABD$ – равнобедренный, значит:

$BD = \sqrt{13}$; AD – медиана $\triangle ABC$, то

$BC = 2\sqrt{13}$

По свойству биссектрисы имеем:

$\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \dfrac{1}{2}$.

математика ШИФР 61-09-М-23

предмет

Задание 3 (продолжение)

Тогда $AE = \frac{1}{3} AC$

Удвоим медиану AD.

Четырехугольник $ABKC$ - параллелограмм, т.к. диагонали в точке пересечения делятся пополам. $BK = AC$ (противоположные стороны параллелограмма)

т.е. $BK = 3AE$

Из подобия треугольников (прямоугольных) $\triangle AQE$ и $\triangle KQB$

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}$$

Пусть $AQ - x$, $BQ - 3x$

$$AB^2 = AQ^2 + BQ^2$$

$$13 \cancel{(13)} = x^2 + 9x^2$$

$$13 \cancel{(13)} = 10x^2$$

$$x^2 = \frac{13}{10} \qquad x = \sqrt{\frac{13}{10}} \quad ; \quad BQ = 3\sqrt{\frac{13}{10}}$$

$AQ = QD$ ($\triangle ABD$ - равнобедренный), то

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BQ = \frac{1}{2} \cdot 2AQ \cdot BQ = \sqrt{\frac{13}{10}} \cdot 3\sqrt{\frac{13}{10}} = 3$$

Т.к. AD - медиана $\triangle ABC$, а медиана делит треугольник на 2 треугольника, равных по площади, то $S_{\triangle ABC} = 2 \cdot 3 = 6$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 6$

Задание 2

$$\begin{cases} |x^4-625x^2| \neq x^4-625x^2, \\ |6x^2-257x+25|+6x^2-257x+251=0 \end{cases}$$

Т.к. $|x^4-625x^2| \neq x^4-625x^2$, то число под знаком модуля будет ~~(...)~~ $625x^2-x^4$, тогда:

$625x^2-x^4=x^4-625x^2$

$2x^4-1250x^2=0$

$2x^2(x^2-625)=0$

$2x^2=0$ или $x^2-625=0$

$x=0$ $\quad$ $x^2=625$

$x=\pm 25$

158

• если $x=0$ то во втором уравнении равенство не выполняется.

$25+251 \neq 0$

„0" – не является корнем системы уравнений.

• если $x=25$, то

$|6\cdot625-257\cdot25+25|+6\cdot625-257\cdot25+251=0$

Следовательно:

$6\cdot625-257\cdot25+25<0$ т.е

$-6\cdot625+257\cdot25-25+6\cdot625-257\cdot25+25=0$

$0=0$

Значит, $x=25$ и $x=-25$ являются корнями системы.

Ответ: $x=25$; $x=-25$