Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ 2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

КЛАСС 8

Вариант 2

Задание 1 (25 баллов)

Сложите числа $1\underbrace{3\ldots3}_{n-1}2$ и $(\underbrace{3\ldots3}_{n})^2$

Решение:

$$1\underbrace{3\ldots3}_{n-1}2+(\underbrace{33..3}_{n})^2=12\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+9\cdot(\underbrace{11\ldots1}_{n})^2=12\cdot A+9A^2=$$

$$=A(9A+12)=A(9A+1+11)=A(9A+1)+11A=$$

$$=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{11\ldots1}_{n}0+\underbrace{11\ldots1}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n-1}1,\text{ где}$$

$$A=\underbrace{11\ldots1}_{n},\ 9A+1=\underbrace{99\ldots9}_{n}+1=1\underbrace{00\ldots0}_{n},$$

$$11A=10A+A=\underbrace{11\ldots1}_{n}0+\underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Ответ: $\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}1$

Задание 2 (25 баллов)

Отрезок числовой оси $[0;1]$ разбит точками $0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<1$ на n отрезков: $[0;\ x_1];[x_1;x_2];\ldots[x_{n-1};1]$. На каждом из отрезков, как на основании, достроили равносторонний треугольник. Может ли сумма площадей этих треугольников оказаться меньше $\frac{1}{1000}$?

Решение:

Разобьем отрезок на 10^k равных по длине отрезков. Тогда длина отрезка будет $\frac{1}{10^k}$.

Площадь равностороннего треугольника со стороной a равна

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{1}{10^k}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4\cdot10^{2k}}.$$

Общая сумма площадей равна $S = 10^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 10^{2k}} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 10^k}$.

Найдем, при каком k сумма площадей этих треугольников $S < \frac{1}{1000}$.

При $k = 1$, $S = \frac{\sqrt{3}}{40} > \frac{1}{1000}$,

при $k = 2$, $S = \frac{\sqrt{3}}{400} > \frac{1}{1000}$,

при $k = 3$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4000} < \frac{1}{1000}$.

При $k \geq 3$, $S < \frac{1}{1000}$.

Ответ: может.

Задание 3 (20 баллов)

На часах со стрелками 20 часов 25 минут 26 секунд. Какой (меньший) угол в этот момент образуют часовая и секундная стрелки?

Решение:

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает $\left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right)$ часов, секундная стрелка показывает 26 секунд.

Часовая стрелка имеет угловую скорость $30\,{}^{\circ}/_{\text{час}}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол

$$\alpha = \left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right) \cdot 30\,{}^{\circ}/_{\text{час}} = \left(240 + \frac{25}{2} + \frac{13}{60}\right)^{\circ} = 252\frac{43}{60}^{\circ}.$$

Секундная стрелка имеет угловую скорость $6\,{}^{\circ}/_{\text{сек}}$, поэтому от момента времени 08ч 25м 00с она повернется на угол

$$\beta = 26 \cdot 6\,{}^{\circ}/_{\text{сек}} = 156^{\circ}.$$

Найдем угол между часовой и секундной стрелками

$$\alpha - \beta = 252\frac{43}{60} - 156 = 96\frac{43}{60}^{\circ}$$

Ответ: $96\frac{43}{60}^{\circ}$**.**

Задание 4 (15 баллов)

Докажите, что число $2027^{2028^{2029}+2} + 2024^{2025^{2026}+1}$ составное?

Решение

Число 2028^{2029} кратно 4, поэтому $2028^{2029} + 2 = 4p + 2$.

Последняя цифра числа $2027^{2028^{2029}+2}$ совпадает с последней цифрой числа $7^{4p+2} = 7^{4p} \cdot 7^2 = (2401)^p \cdot 49$ – последняя цифра равна 9 при любом p.

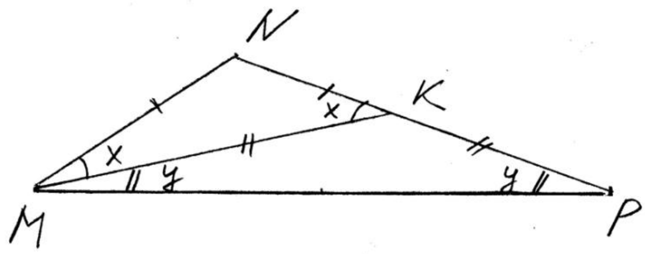
Последняя цифра числа $2024^{2025^{2026}+1}$совпадает с последней цифрой числа $4^{2025^{2026}+1}$. Число $2025^{2026} + 1$ - четное, а 4^{2k} оканчивается на 6 при любом k, то

и число $2024^{2025^{2026}+1}$ оканчивается на 6.
Исходная сумма оканчивается на 9+6 -10, то есть на 5, поэтому данное число составное.

Ответ: число составное

Задание 5 (15 баллов)
Дан треугольник MNP. Точка K лежит на стороне NP. Известно, что $MN = NK$ и $MK = KP$, угол MNP равен 120°. Найдите остальные углы треугольника MNP.

Решение



Треугольники MNK и MKP – равнобедренные, поэтому углы при их основаниях равны. Обозначим эти углы x и y соответственно. Тогда по свойству внешнего угла MKN для треугольника MKP, имеем $x = 2y$. Отсюда сумма углов NMP и NPM равна $4y = 180° - 120° = 60°$, $y = 15°, x = 30°$,
$\angle P = y = 15°, \angle M = x + y = 45°$

Ответ: угол P=15°, угол M= 45°.