МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)**

**ОЛИМПИАДА «Я-БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

**5-11 КЛАССОВ**

# МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМУ ЭТАПУ ОЛИМПИАДЫ

2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА ДЛЯ **11** КЛАССА

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к освоению образовательных программ ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на верное и полное решение. Задания направлены на выявление интеллектуального потенциала, аналитических способностей и креативности мышления участников.

Очный этап олимпиады проводится только в письменной форме. Каждый участник олимпиады получает бланк с заданием одного из двух вариантов, содержащий 5 заданий. Задание считается выполненным, если получен верный ответ (ответы) на поставленный вопрос (вопросы). Задания олимпиады предполагают, что вопросов и вариантов ответа может быть несколько. Наибольшая итоговая сумма баллов, которой могут быть оценены ответы на все вопросы олимпиадного **варианта** при условии отсутствия в них ошибок, неправильных, неполных или неточных ответов, равна **100**. При отсутствии полного и верного ответа оцениваются отдельные этапы решения и характер допущенных ошибок, то есть возможен частичный зачёт баллов за неполный или неверный ответ за **задание**. Под неполным понимается ответ, содержащий правильные ответы не на все вопросы или варианты решения **задания**. Подсчёт итоговой оценки за весь **вариант** осуществляется путём суммирования баллов, выставленных за каждое из **заданий**.

На решение задач отборочного этапа Олимпиады отводится 3 часа 30 минут (три часа тридцать минут или 210 минут). Отсчет времени начинается с момента начала выполнения заданий.

## ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА

### РАЗДЕЛ 1. Арифметика (теория чисел): структура и свойства натуральных чисел. Алгебра: преобразование алгебраических выражений. Метод координат

Умение решать неопределенные уравнения в классах целых или натуральных чисел. Предполагает знание участником базовых понятий: одночлен, многочлен; подобные одночлены. Умение выполнять операции над многочленами, в частности, раскладывать их на произведение множителей.

Преобразование выражений со знаком модуля. Построение множеств точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству, системе неравенств, совокупности неравенств.

**РАЗДЕЛ 2. Задачи на совместную работу. Круговое движение. Анализ циклических (периодических) процессов**

Предполагает знание участником базовых понятий: работа, производительность; угловая скорость движения, угол поворота. Понятие периода и периодических структур.

**РАЗДЕЛ 3. Планиметрия: расчет элементов треугольников и четырехугольников**

Предполагает знание участником важнейших фактов о взаимосвязи сторон и углов треугольников и четырехугольников, включая теоремы синусов и косинусов; уверенное владение признаками равенства и признаками подобия; знание основных фактов о вписанных и описанных окружностях.

**Примеры заданий:**

**Задание 1:**

a) Делится ли число $2022^{2021} + 2022^{2022} + 2022^{2023}$ на 5?
b) При каких натуральных значениях a, не кратных 5, выражение $a^{2021} + a^{2022} + a^{2023}$ кратно 5?

**Решение**

a) Преобразуем сумму:
$2022^{2021} + 2022^{2022} + 2022^{2023} = 2022^{2021}(1 + 2022 + 2022^2)$.

Число в скобке заканчивается цифрой 7, следовательно, на 5 не делится.

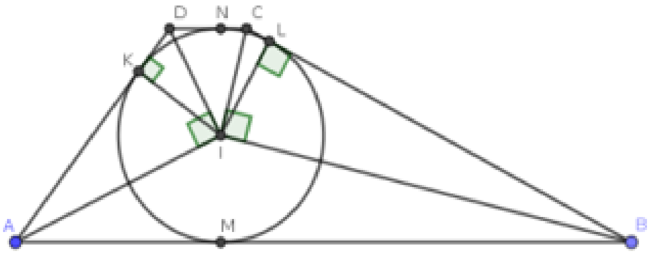
b) $a^{2021} + a^{2022} + a^{2023}$=$a^{2021}(1 + a + a^2)$. Пусть $1 + a + a^2 = 5k$. Проанализируем наличие натуральных корней этого уравнения:

$a^2 + a + 1 - 5$k=0; D=20k-3=$m^2$; $20k = m^2 + 3$, то есть $m^2$ оканчивается цифрой 7, что не возможно. Следовательно, таких натуральных

a не существует.

**Ответ: а) не делится; в) таких а не существует.**

**Задание 2:** В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны $AD$ в точке $K$. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16, DK = 4, CD = 6$.




**Решение**

1) Пусть $M, L, N -$ точки касания вписанной окружности со сторонами $AB, BC, CD$ соответственно; пусть $I -$ центр вписанной окружности. Обозначим $r$ —радиус вписанной окружности.

2) По свойству отрезков касательных $DN = KD = 4, AK = AM = 16$, очевидно, что $CN = CD - DN = 6 - 4 = 2$, тогда по свойству отрезков касательных $CL = CN$= 2.

3) Так как $I -$ центр вписанной окружности, то $I -$ точка пересечения биссектрис внутренних углов трапеции. Поэтому $\frac{\angle A + \angle D}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$,

Следовательно $\Delta AID -$ прямоугольный. Аналогично, $\Delta BIC -$ прямоугольный.

4) Так как $IK$ и $IL -$ радиусы, проведенные к точкам касания, то $IK \perp AD, IL \perp BC$. По теореме о перпендикуляре, проведенном из вершины прямого угла на гипотенузу, $IK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{16 \cdot 4} = 8$

Аналогично, $IL^2 = CL \cdot BL, 8^2 = 2 \cdot BL, BL = 32$, тогда $BM = BL = 32$.

$AB = AM + BM = 16 + 32 = 48$.

5) Находим площадь трапеции.

$$S_{\text{тр}} = \frac{AB + CD}{2} \cdot MN$$

Высота трапеции $MN = 2r = 2 \cdot 8 = 16$ и

$$S_{\text{тр}} = \frac{48 + 6}{2} \cdot 16 = 432$$

**Ответ: 432.**

**Задание 3:** Сравните числа: $a^{log_b a^2}$ и $b \cdot b^{(log_b a)^2} + a$, если $a = 2022, b = 2021$.

**Решение**

$a^{log_b a^2} = a^{2\log_b a}$, $\quad b \cdot b^{(log_b a)^2} + a = b \cdot a^{\log_b a} + a$

Рассмотрим разность $a^{2\log_b a} - b \cdot a^{\log_b a} - a$

Пусть $a^{\log_b a} = x$, тогда получим трехчлен $x^2 - bx - a$.

В случае $a = 2022, b = 2021,$ трехчлен имеет вид $x^2 - 2021x - 2022,$ где $x = 2022^{\log_{2021} 2022}$ . Так как $\log_{2021} 2022 > 1,$

то $x > 2022,$ поэтому

$$x^2 - 2021x - 2022 = (x+1)(x-2022) > 0$$

$x^2 - bx - a > 0,$ т.е. $x^2 > bx + a,$ откуда

$$2022^{2\cdot\log_{2021} 2022} > 2021 \cdot 2022^{\log_{2021} 2022} + 2022$$

**Задание 4:** На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2023. Случайно стерли одно из чисел. Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел совпасть с одним из оставшихся на доске чисел? Если да, то какое число было стерто?

**<u>Решение</u>**

$$1 + 2 + \cdots + 2023 = \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2023 \cdot 1012 = S$$

Если стереть число $x$, то на доске останется 2022 числа с суммой $S$-х.

Тогда

$$y = \frac{2023 \cdot 1012 - x}{2022} = 1012 + \frac{1012 - x}{2022}.$$

Так как у – натуральное число, то x=1012, но тогда y=1012, то есть равно удаленному числу.

**Ответ: не может.**

**Задание 5:** При каких значениях параметров А и В уравнение

$$x^2 + 4x \cdot cosA + y^2 - 2y \cdot cosB + 5 = 0$$

имеет решения. Найти эти решения.

**<u>Решение</u>**

Преобразуем данное уравнение

$$x^2 + 4x \cdot cosA + 4cos^2A - 4cos^2A + y^2 - 2y \cdot cosB + cos^2B - cos^2B + 5 = 0$$

$$(x^2 + 4x \cdot cosA + 4cos^2A) + (y^2 - 2y \cdot cosB + cos^2B) + 4 - 4cos^2A + 1 - cos^2B = 0$$

$$(x + 2cosA)^2 + (y - cosB)^2 + 4sin^2A + sin^2B = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x + 2cosA = 0 \\ y - cosB = 0 \\ sinA = 0 \\ sinB = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2cosA \\ y = cosB \\ A = \pi k, k \in \mathbb{N} \\ B = \pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2(-1)^k \\ y = (-1)^n \\ A = \pi k, k \in \mathbb{N} \\ B = \pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**Ответ:** $\boldsymbol{A = \pi k, B = \pi n, n, k \in \mathbb{N}}$ **,** $\boldsymbol{x = -2(-1)^k, y = (-1)^n}$

**Задание 6:** Сколько точек плоскости с натуральными координатами попадает на график кривой

$$x^2 + 2023 = 16y^2$$

при условии, что обе координаты – простые числа.

**<u>Решение</u>**

Очевидно, что если точка с координатами $(x_0; y_0)$ находится на графике данной кривой, то и точки $(-x_0; y_0), (x_0; -y_0), (-x_0; -y_0)$ также находятся на этой линии. Перенесем второе слагаемое из левой части направо

$$16y^2 - x^2 = 2023$$

и разложим левую и правую части на множители. Получим уравнение

$$(4y - x)(4y + x) = 1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17.$$

Возможны следующие случаи

1) $\begin{cases} 4y - x = 1 \\ 4y + x = 2023 \end{cases} \to x = 1011$ - не является простым числом;

2) $\begin{cases} 4y - x = 2023 \\ 4y + x = 1 \end{cases} \to x < 0$ ;

3) $\begin{cases} 4y - x = 7 \\ 4y + x = 289 \end{cases} \to x = 141$ - не является простым числом;

4) $\begin{cases} 4y - x = 289 \\ 4y + x = 7 \end{cases} \to x < 0$ ;

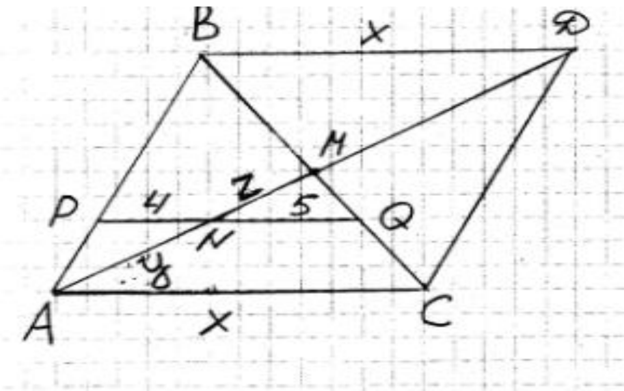
5) $\begin{cases} 4y - x = 17 \\ 4y + x = 119 \end{cases} \to x = 51$ - не является простым числом;

6) $\begin{cases} 4y - x = 119 \\ 4y + x = 17 \end{cases} \rightarrow x < 0$ .

**Ответ: на графике заданной кривой таких точек нет.**

**<u>Задание 7:</u>** Прямая, параллельная стороне $AC$ треугольника $ABC$, пересекает его стороны $AB$ и $BC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Медиана $AM$ пересекает отрезок $PQ$ в точке $N$. Длины отрезков $PN$ и $NQ$ равны 4 и 5. Найти длину стороны AC.

**<u>Решение.</u>**




Обозначим сторону $\mathrm{AC} = x$,

$AN = y, MN = z,$ по условию

$PN = 4, NQ = 5.$

Достроим треугольника $ABC$ до параллелограмма, тогда

$$BD = AC = x$$

Так как $\Delta ABD$ подобен $\Delta APN$ ($PQ \parallel BD$), то

$$\frac{BD}{PN} = \frac{AD}{AN} \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2(y+z)}{y} \rightarrow y + z = \frac{xy}{8} \,(1)$$

А из подобия треугольников $AMC$ и $MNQ$ следует что

$$\frac{AC}{NQ} = \frac{AM}{MN} \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y+z}{z} \rightarrow y + z = \frac{xz}{5} \,(2)$$

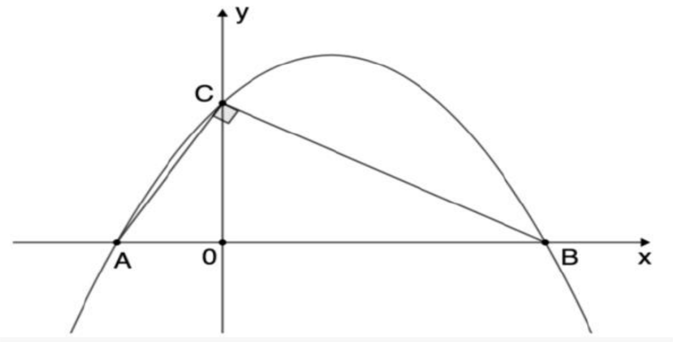
Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{y}{z} = \frac{8}{5}$

$\frac{x}{5} = \frac{y+z}{z} = \frac{y}{z} + 1 = \frac{13}{5}$, откуда $x = 13$

**Ответ:** AC $=$ **13**

**Задание 8:** На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A(-5; 0)$ и $B(20; 0) -$ пересечения данной параболы с осью $Ox$. Точка $C -$ пересечение данной параболы с осью $Oy -$ расположена выше оси $Ox$. Также известно, что $\angle ACB = 90°$. Найдите коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена.

**<u>Решение</u>**




Пусть $O$ — начало координат, тогда $CO$ — высота прямоугольного треугольника $ABC$.

По теореме о перпендикуляре, проведенном из вершины прямого угла на гипотенузу $CO = \sqrt{AO \cdot OB} = \sqrt{5 \cdot 20} = 10$,

Тогда точка $C(0;10)$.

Для нахождения числа $a$ подставим координаты точек $A, B$ и $C$ в уравнение параболы. Получим систему $\begin{cases} 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 400a + 20b + c \\ 10 = c \end{cases}$, решая которую находим $a = -0{,}1$.

**Ответ: -0,1.**

## *Литература для подготовки*

1. Гальперин Г.А., Толпыго А.Л., под ред. А.Н.Колмогорова Московские математические олимпиады. Москва: Просвещение, 1986
2. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. Москва: Просвещение, 1966
3. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Математика, физика: сборник информационно-методических и образовательных материалов/Власова Е.А., Ирьянов Н.Я., Паршев Л.П., Струков Ю.А., Шишкина С.И.; Под ред. Н.Я. Ирьянова.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 315 с.
4. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Москва: Наука, 1988

## *Информационные ресурсы:*

https://mathus.ru/

***Пособия для подготовки к олимпиадам по математике***

https://journal.school-olymp.ru/posobiya-dlya-podgotovki-k-olimpiadam-po-matematike

https://olimpiadnye-zadanija.ru/predmet/matematika/

http://ermolovskiy.ru/knigi-dlya-podgotovki-k-olimpiadam/

***Видеокурсы по подготовке к олимпиаде по математике***

http://cendop.bmstu.ru/userfiles/docs/Razbor_zadach_math_2012.ppt