Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2025/2026 уч. год

________________ **ШИФР** 61-11-М-22
предмет

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
Баллы	10	20	10	5	10						55

Вариант 2.

№1.

10

Рассмотрим характеристическую функцию $S_i(x)$.

$$S_i(x)=\begin{cases}1, x\in F_i\\ 0, x\notin F_i\end{cases}$$

Пусть ф-ия $f(x)=\sum_{i=1}^{2026} S_i(x)$ считает, сколько фигур содержит точку x.

Т.к. фигур всего 2026, то макс. знач. ф-ии $f(x)$ может быть равно 2026.

Сумма S-ей всех фигур F_i равна интегралу от фун. $f(x)$ по площади всей фигуры F:

$$\int_F f(x)\,dA=\sum_{i=1}^{2026} S(F_i)\le 2025 \text{ (т.к. } f(x) \text{ - цело число)}$$

Если $f(x)\le 2025$, $\forall x$, то интеграл от этой ф-ии не может превышать произведение max возможн. знач. фун. на общую S области F

$$\int_F f(x)\,dA\le 2025\cdot S(F), \text{ по усл. } S(F)=\frac{2027}{2026}$$

$$\int_F f(x)\,dA\le 2025\cdot\frac{2027}{2026}=\frac{2026^2-1}{2026}=2026-\frac{1}{2026}$$

Видим противореч., что если бы такой (·) не сущ., то сумма S-ей была бы не больше $2026-\frac{1}{2026}$ ($\approx 2025{,}99$), однако по усл. такая $S>2026 \Longrightarrow$ утверждение верно.

Ответ: да, существует

ШИФР 61-11-М-22

предмет

№2. 20

$x^2+y^2-5x-y \le |5y-x|$

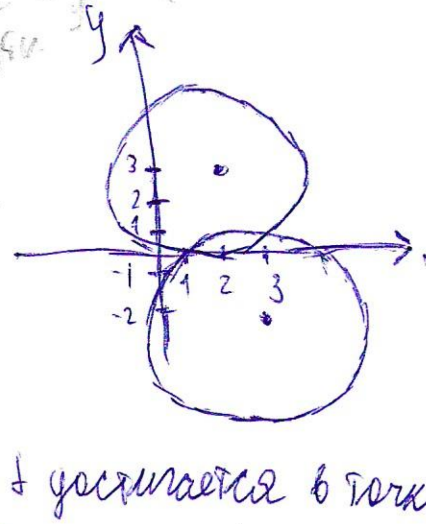
1. Если $5y-x \ge 0$, то $x^2+y^2-5x-y \le 5y-x \Rightarrow x^2-4x+y^2-6y \le 0$
2. Если $5y-x < 0$, то $x^2+y^2-5x-y \le -(5y-x) \Rightarrow x^2-6x+y^2+4y \le 0$

Выделим полн. квадр.

1) $(x-2)^2-4+(y-3)^2-9 \le 0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 \le 13$

2) $(x-3)^2-9+(y+2)^2-4 \le 0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 \le 13$

Решение нерав. представ. объед. двух окр. радиуса $\sqrt{13}$ с центрами в (·) $(2;3)$ и $(3;-2)$



Для нахождения наиболее удален. целочислен. точек, удовлетворяющих решению нер-ва, воспользуемся формулой:
$d^2=x^2+y^2$

Наиб. d достигается в точках $(4;6)$ и $(6;-4)$. он равен между собой равен $\sqrt{52}$

Для нахождения колич. решений в целых (·)-ах используем сетку для подсчета точек. Всего таких точек — 80.

Ответ: Всего 80 точек, наиб. удален. от центра: $(4;6)$ и $(6;-4)$

______________________ ШИФР 61-11-М-22
предмет

№3.

Определим скорости стрелок в градусах/минут:

Мин. стрелка – 6°/мин

Часов. стрелка – $0,5^\circ$/мин

Тогда относит. ск: $6-0,5=5,5^\circ$/мин.

Определим начальные углы:

Минутная стрелка: $25+\frac{26}{60}=\frac{1526}{60}$ мин.

$\angle_м=\frac{1526}{60}\cdot 6=152,6^\circ$

Часов. стрелка: $8+\frac{25}{60}+\frac{26}{3600}=\frac{30326}{3600}$ часов

$\angle_ч=\frac{30326}{3600}\cdot 30=\frac{30326}{120}=\frac{15163}{60}\approx 252,72^\circ$

Тогда $|\angle_ч-\angle_м|=252,72^\circ-152,6^\circ=100,12^\circ$

На ~~этот~~ момент времени угол будет уменьш. $\Rightarrow$ до 90° нужно пройти $100,12^\circ-90^\circ=10,12^\circ$

Тогда время до достижения прямого угла: $\frac{10,12}{5,5}\approx 1,84$ мин. $\Rightarrow \approx$ 1 мин 50 сек.

Ответ: 1 минута 50 секунд.

10

№4.

12 июля 2025 г., суббота,

Отсчёт с 11 июля 2025 года, пятница: Вычтем 365 суток $\Rightarrow$ 11 июля 2025 $\rightarrow$ 11 июля

Остается 35 суток. От 11 июля назад до 30 июня – 11 суток: $35-11=24$

Тогда от 30 июня 2024: $30-24=6$

Искомая дата: 6 июня 2024 года; Теперь определим сдвиг дня недели:

$400 \mod 7=1 \Rightarrow$ смещение на 1 день назад. пятница $\rightarrow$ четверг.

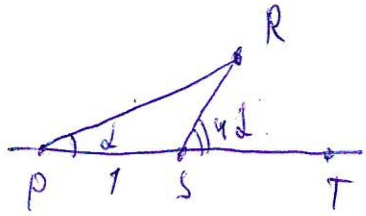
Ответ: 6 июня 2024 года, четверг.

3

ШИФР 61-11-М-22

предмет

№5.



Дано: $\angle RPS = \alpha$, $\angle RST = 4\alpha$, ΔPRS – р/б, $PS = 1$

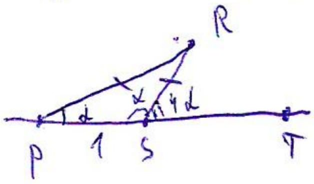
Найти: $S_{\Delta PRS}$ – ?

Решение:

10

ΔPRS – р/б, возможны 2 случая:

1. Если равны $PR = RS$ тогда:



$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$ $5\alpha = 180^\circ$ $\alpha = 36^\circ$ ($\angle RPS$ и $\angle RSP$) $\Rightarrow \angle PRS = 180^\circ - 72^\circ = 10$

По т. синусов: $\frac{PR}{\sin 36^\circ} = \frac{PS}{\sin 108^\circ} \Rightarrow PR = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ}$

$S_{\Delta PRS} = \frac{1}{2} \cdot PS \cdot PR \cdot \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ} \cdot \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 36^\circ}{\sin(180^\circ - 72^\circ)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 36^\circ}{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ} = \frac{1}{4} \cdot tg 36$

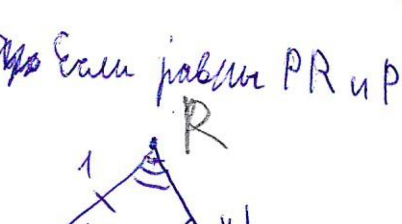
Пусть $x = 36^\circ$, тогда $5x = 180^\circ \Rightarrow tg 5x = 0$, $t = tg x$

$tg 5x = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4} \Rightarrow 5t - 10t^3 + t^5 = 0 \Rightarrow t(5 - 10t^2 + t^4) = 0$, $t \neq 0$

решим биквадрат. ур-е $\Rightarrow tg^2 36^\circ = 5 - 2\sqrt{5}$ (т. к. $tg^2 36^\circ < 1$), $tg 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \Rightarrow tg 36^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$S_{\Delta PRS} = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$ кв. ед.

2. Если равны PR и PS, тогда:



$\angle RSP = \angle PRS = (180^\circ - 4\alpha)$. $\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle RSP = \angle PRS = \frac{180^\circ}{7}$, тогда $S_{\Delta PRS} = \frac{1}{2} PR \cdot PS \cdot \sin\frac{180^\circ}{7} = \frac{1}{2} \sin\frac{180^\circ}{7}$

Пусть $x = \frac{180^\circ}{7}$, $a = \sin x \Rightarrow 7x = 180^\circ \Rightarrow \sin 7x = 0$

Формула для семикратного угла: $\sin 7x = 64\sin^7 x - 112\sin^5 x + 56\sin^3 x - 7\sin x$

$64a^7 - 112a^5 + 56a^3 - 7a = 0 \,|: a$, т. к. $a \neq 0$ $\quad 64a^6 - 112a^4 + 56a^2 - 7 = 0$

Применим т. Безу и разложим ур-е: $(4a^2 - (3 - \sqrt{7}))(4a^2 - (3 + \sqrt{7}))(4a^2 - 1)$

$a = \pm\frac{1}{2}$, $a = \pm\frac{\sqrt{3 - \sqrt{7}}}{2}$, $a = \pm\frac{\sqrt{3 + \sqrt{7}}}{2}$ при усл. $0 < \frac{180^\circ}{7} < 90^\circ$ используем $\sin\frac{180^\circ}{7} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{7}}}{2}$

$S_{\Delta PRS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 - \sqrt{7}}}{2} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{7}}}{4}$ кв. ед.

Ответ: Случай 1: $S_{\Delta PRS} = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$ кв. ед.; Случай 2: $S_{\Delta PRS} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{7}}}{4}$ кв. ед.