Материалы заданий олимпиады по математике 2020-2021 учебного года

8 КЛАСС

Задание 1

Является ли число $2019^{2022} + 2021$ квадратом натурального числа?

Ответ: нет.

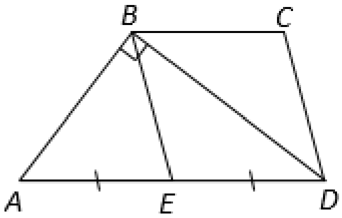
Решение: $2019^{2022} = (2010 + 9)^{2022}$. Число 9^{2022} заканчивается на 1. Следовательно, последняя цифра числа 2019^{2022} единица. Поэтому последняя цифра данного числа 2, но не существует натурального числа, квадрат которого заканчивается на цифру 2.

Задание 2

В трапеции $ABCD$ $(AD||BC)$: $AD = 2,\ BC = 1, \angle ABD = 90°$. Найдите длину CD.

Ответ: 1

Решение:



Пусть E — середина основания AD. Так как треугольник ABD прямоугольный, $BE = AE = DE = 1$. С другой стороны, $BC = DE$ и $BC \parallel DE$, так что $BCDE$ — параллелограмм. Следовательно, $CD = BE = 1$.

Задание 3

Пусть m и n - два последовательных нечетных натуральных числа. Докажите, что число $7m^2 - 5n^2 - 2$ делится на 8.

Ответ: делится

Решение: 7m2–5n2–2=2(m–1)(m+1)+5(m–n)(m+n). В первом слагаемом m–1 и m+1 четны, следовательно, это слагаемое делится на 8. Во втором слагаемом m–n равно 2 (или –2), а m+n делится на 4 (так как последовательные нечетные числа дают остатки 1 и 3 или 3 и 1 от деления на 4), таким образом, и это слагаемое делится на 8. Откуда получаем, что все выражение кратно 8.

Задание 4

В классе каждый ученик занимается спортом или программированием, или тем или другим одновременно. Спортсмены составляют 80% от общего количества учеников, а программисты – 40%. Когда пятеро спортсменов решили на время прекратить тренировки, то число спортсменов уменьшилось на пять, а число программистов выросло на три. После этого число тех, кто занимается спортом, и число тех, кто программирует, стало одинаковым. (Если спортсмен не тренируется, то начинает программировать). Сколько ребят в классе?

Ответ: 20 человек в классе.

Решение: Пусть x всего учеников, тогда 0,8x – спортсмены, а 0,4x программисты и 20% от общего количества занимается спортом и программирует, т.е. 0,2x. Тогда 0,6x- только спортсмены и 0,2x учеников только программисты. Учитывая условие задачи, получим уравнение 0,6x-5=0,2x+3, откуда x=20.

Задание 5

Часы со стрелками показывают ровно 6 часов 00 минут. Через какое время минутная стрелка второй раз догонит часовую?

Ответ: 98,18 минут.

Решение: За 1 час минутная стрелка проходит 1 круг, а часовая 1/12 круга. Отставание минутной от часовой ½ круга. Найдем время, за которое минутная стрелка первый раз догонит часовую. Минутная стрелка пройдет на ½ круга больше, поэтому $1 \cdot t - \frac{1}{12}t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{6}{11}$ часа. Найдем время t_1, за которое минутная стрелка второй раз догонит часовую. Минутная стрелка пройдет 1 круг, а часовая 1/12 круга, причем минутная стрелка пройдет на 1 круг больше, поэтому $1 \cdot t_1 - \frac{1}{12}t_1 = 1,\ t_1 = \frac{12}{11}$. Всего $\frac{6}{11}+\frac{12}{11} = \frac{18}{11} = 98{,}18$ минут.

9 КЛАСС

Задание 1

Сколько точек координатной плоскости, имеющих натуральные координаты, лежат на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 9x + 19$.

Ответ: 18.

Решение: Найдем те значения x, при которых y положителен. $-\frac{x^2}{4}+9x+19 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+2)(x-38)>0$, откуда $-2<x<38$. На этом промежутке существует 37 натуральных значений x: x=1, x=2, ... x=37. При этом y принимает целые значения только при четных x- всего 18 возможностей. Итак, получаем 18 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты натуральные числа.

Задание 2

Докажите, что число $2019^{2020}+2022^{2021}$ не является полным квадратом.

Решение: $2019^{2020}=(2010+9)^{2020}$. Так, как число 9^{2020} заканчивается на цифру 1, то и число 2019^{2020} заканчивается на 1.
$2022^{2021}=(2020+2)^{2021}$. Число 2^{2021} заканчивается на 2, поэтому и 2022^{2021} заканчивается на 2. Следовательно, последняя цифра числа $2019^{2020}+2022^{2021}$ три, но не существует натурального числа, квадрат которого заканчивается на цифру 3. Поэтому данное число не является полным квадратом.

Задание 3

Если двузначное число поделить на некоторое натуральное, то в частном получится 3, а в остатке 8. Если же в исходном числе поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите это двузначное число.

Ответ: 53.

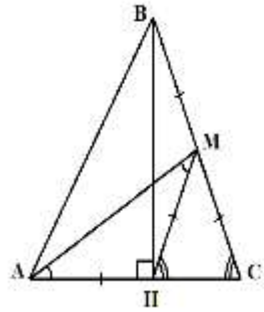
Решение: Пусть $\overline{xy}$- искомое число, x,y=1,2…9, z- делитель. Тогда по условию
$$\begin{cases}10x+y=3z+8\\10y+x=2z+5\end{cases} \Rightarrow 17x-28y=1 \Leftrightarrow 28(x+y)=1+11x.$$
Т.к. $1\le x\le 9$, то $12\le 1+11x\le 100$. На этом отрезке только числа 28, 56, 84 делятся на 28. Проверкой убеждаемся, что подходит только $56=1+11x, x=5, y=3$.

Задание 4

В Δ ABC: AM – медиана, BH – высота. Известно, что AH = 1, $\angle MCA = 2\angle MAC$. Найдите длину BC.

Ответ: 2.

Решение:



Проведём отрезок *MH,* он будет медианой прямоугольного треугольника *BHC*, проведённой к гипотенузе *BC* и равен её половине. Тогда $\triangle MHC$ – равнобедренный, поэтому $\angle MHC = \angle MCH = 2\angle MAC$, значит, $\angle HMA = \angle HAM$, поэтому, *AH = HM = MC = 1* и *BC = 2MC = 2*.

Задание 5

На доске записаны $\boldsymbol{n}$ последовательных натуральных чисел ($\boldsymbol{n} \geq 3$). Может ли их сумма оказаться равной 2021? (Справка: 2021=43х47).

Ответ: может если $x = 26$, $n = 43$ и х=20, $n = 47$.

Решение:

$$x + (x+1) + \cdots + (x+n-1) = 2021$$

$$nx + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = 2021$$

$$nx + \frac{n(n-1)}{2} = 2021$$

$$n\left(x + \frac{n-1}{2}\right) = 43 \cdot 47$$

$$\begin{cases} n = 43 \\ x + \frac{n-1}{2} = 47 \end{cases} \quad , x = 26$$

$$\begin{cases} n = 47 \\ x + \frac{n-1}{2} = 43 \end{cases} \quad \text{х=20}$$

1) $26 + 27 + \cdots + 68 = \frac{26+68}{2} \cdot 43 = 47 \cdot 43 = 2021$

2) $20 + 21 + \cdots + 66 = \frac{20+66}{2} \cdot 47 = 43 \cdot 47 = 2021$

10 КЛАСС

Задание 1

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: при $a = -\frac{1}{2}$.

Решение: Так, как $x^2+y^2=z,$ то $x+y+x^2+y^2=a.$ Выделяя полные квадраты в левой части, получим $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=a+\frac{1}{2}.$ А это уравнение имеет единственное решение при $a+\frac{1}{2}=0,$ то есть при $a=-\frac{1}{2}$ При этом $x+\frac{1}{2}=0,$ $x=-\frac{1}{2},$ $y+\frac{1}{2}=0,$ $y=-\frac{1}{2},$ $z=\frac{1}{2}.$

Задание 2

Сравните числа $\frac{\sin 2020°}{\sin 2021°}$ и $\frac{\sin 2022°}{\sin 2023°}$;

$\frac{\sin 2020}{\sin 2021}$ и $\frac{\sin 2022}{\sin 2023}$.

Ответ: первое выражение меньше.

Решение:

Сравним $\frac{\sin 2020°}{\sin 2021°}$ и $\frac{\sin 2022°}{\sin 2023°}$

Заметим, что $1800°=360°\cdot 5$, тогда $2020°=360°\cdot 5+220°$,
$2021°=360°\cdot 5+221°$, $2022°=360°\cdot 5+222°$, $2022°=360°\cdot 5+223°$

Т.к. $\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$, то получим $\frac{\sin 220°}{\sin 221°}$ и $\frac{\sin 222°}{\sin 223°}$

Применим формулу $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$. Получим

$\frac{-\sin 40°}{-\sin 41°}$ и $\frac{-\sin 42°}{-\sin 43°} \Leftrightarrow \frac{\sin 40°}{\sin 41°}$ и $\frac{\sin 42°}{\sin 43°}$

Так как $\sin 41°\cdot\sin 43°>0$, то переходим к сравнению следующих чисел $\sin 40°\cdot\sin 43°$ и $\sin 41°\cdot\sin 42°$.

Воспользуемся формулой $2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$2\sin 40°\cdot\sin 43°=\cos 3°-\cos 83°$, $2\sin 41°\cdot\sin 42°=\cos 1°-\cos 83°$

После преобразования осталось сравнить $\cos 3°$ и $\cos 1°$.

Так как на промежутке $[0°,90°]$ косинус убывает, то $\cos 3°<\cos 1°$, откуда

$$\frac{\sin 2020°}{\sin 2021°}<\frac{\sin 2022°}{\sin 2023°}$$

Ответ: первое выражение больше.

Решение:

Сравним $\frac{\sin 2020}{\sin 2021}$ и $\frac{\sin 2022}{\sin 2023}$

Положим $\pi=3{,}14$,тогда $321\cdot 2\pi=321\cdot 6{,}28=2015{,}88$ и

2020=2015,88 +4,12 2022=2015,88 +6,12

2021=2015,88 +5,12　　　　　　2023=2015,88 +7,12

Так как $\sin(6{,}28 \cdot k + \alpha) = \sin\alpha$, то получим

$$\frac{\sin 4{,}12}{\sin 5{,}12} \text{ и } \frac{\sin 6{,}12}{\sin 7{,}12}$$

Применим формулу $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$. Получим

$$\frac{-\sin 0{,}98}{-\sin 1{,}98} \text{ и } \frac{-\sin 2{,}98}{-\sin 3{,}98} \Leftrightarrow \frac{\sin 0{,}98}{\sin 1{,}98} \text{ и } \frac{\sin 2{,}98}{\sin 3{,}98}$$

Так как $\sin\alpha > 0$ на $(0;\ 3{,}14)$, и $\sin\alpha < 0$ на $(\ 3{,}14; 6{,}28)$ то

$$\frac{\sin 0{,}98}{\sin 1{,}98} > 0, \text{а } \frac{\sin 2{,}98}{\sin 3{,}98} < 0$$

и поэтому $\dfrac{\sin 2020}{\sin 2021} > \dfrac{\sin 2022}{\sin 2023}$.

<u>Задание 3</u>

Из всех треугольников, имеющих сторону **a** и противолежащий этой стороне угол **α**, найдите тот, у которого наибольший периметр. Найдите этот периметр.

Ответ: треугольник равнобедренный

$$P = a\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Решение: Обозначим $a, b, c -$ стороны треугольника и α, β и $\gamma -$ углы, лежащие против этих сторон.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, откуда

$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$, $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$, $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, тогда $c = \frac{a \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

Находим периметр треугольника $P = a + b + c = a + \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

После преобразования получим $P = a\left(1 + \frac{2\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\right)$.

Периметр будет наибольшим, когда $\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = 1$, то есть $\beta + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, откуда $b = c$ и треугольник равнобедренный.

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$P = a + 2b = a\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Задание 4

Если к натуральному числу $\boldsymbol{N}$ прибавить натуральное число $\boldsymbol{a}$, то получится точный квадрат. Если от этого же натурального числа $\boldsymbol{N}$ вычесть натуральное число $\boldsymbol{b}$, то опять получится точный квадрат. Сколько таких различных $\boldsymbol{N}$ существует, если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2021$? (Справка: 2021= $43 \cdot 47$).

Решение:

Пусть $N+a=x^2, N-b=\ y^2,$ откуда $a+b=x^2-y^2=(x-y)(x+y),$ $x, y -$ натуральные числа, причем $x>y$

По условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2021$, поэтому $(x-y)(x+y)=2021$, или $(x-y)(x+y)=43 \cdot 47$

Так как $x, y -$ натуральные числа, то $\begin{cases} x-y=43 \\ x+y=47 \end{cases}$; $\quad x=45, y=2$

$(x-y)(x+y)=2021 \cdot 1$, откуда $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2021 \end{cases}$; $\quad x=1011, y=1010$

Так как найдены две пары (45,2) и (1011, 1010), $N=x^2-a,$ и при этом 0<a<2021, то для каждой пары существует ровно 2020 различных значений a, то есть всего 4040 вариантов числа $\boldsymbol{N}$?

Задание 5

В треугольнике OBH точка M принадлежит OB, OM = 4, MB = 28, $\angle$OHM = $\angle$OBH, $\angle$BOH = 45°. Найдите площадь треугольника OBH.

Ответ: 128

Решение:

$$S_{OBH}=\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OH \cdot \sin 45°$$

$OB=OM+MB=32$. Найдем OH.

В треугольниках OHB и OHM угол O-общий, $\angle$ OBH = $\angle$ OHM. Следовательно, $\Delta OBH \sim \Delta OHM$. Следовательно $\frac{OH}{OM}=\frac{OB}{OH}$.

Откуда $OH^2=OB \cdot OM=32 \cdot 4=128$, $OH=\sqrt{128}=8 \cdot \sqrt{2}$.

$$S_{OBH}=\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=128$$

11 КЛАСС

Задание 1

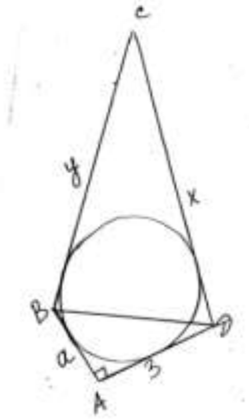
Четырехугольник ABCD описан около окружности. Длины сторон этого четырехугольника являются натуральными числами.

$\angle C = 60°$, $\angle A = 90°$, $AD = 3$. Каким может быть периметр четырехугольника?

Ответ: 12 и 30.

Решение: Пусть $AB = a, DC = x, BC = y$. По свойству окружности, вписанной в четырехугольник, $y + 3 = a + x$ и $P = a + x + y + 3$

Из треугольника ABD: $BD^2 = a^2 + 9$ и из треугольника BCD по теореме косинусов $BD^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°$,



Тогда $x^2 + y^2 - xy = a^2 + 9$

Получим систему

$$\begin{cases} x + 3 = a + y \\ x^2 + y^2 - xy = a^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + 3 - y \\ x^2 + y^2 - xy = (x + 3 - y)^2 + 9 \end{cases}$$

Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 - xy = (x + 3 - y)^2 + 9$, получим

$xy - 6y = 18 - 6x$,

$y = \frac{18-6x}{x-6} > 0$, откуда $3 < x < 6$ и так как x – число натуральное,

то $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ a = 2 \end{cases}$ и $P = 12$, или $\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \\ a = 10 \end{cases}$ и $P = 30$

<u>Задание 2</u>

Известно, что $2021 \cdot (x + y + z) = 1$ и $xy + xz + yz = 2021 \cdot xyz$. Среди чисел x, y, z нет нуля. Вычислите значение $x^{2021} + y^{2021} + z^{2021}$.

Ответ: 2021^{-2021}

Решение:

$$\begin{cases} 2021 \cdot (x + y + z) = 1 \\ xy + xz + yz = 2021 \cdot xyz \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

$(x + y + z) \cdot (xy + xz + yz) = xyz$

$((x + y) + z)) \cdot \big(xy + z(x + y)\big) = xyz$

$(x + y)\, xy + xyz + z(x + y)^2 + z^2(x + y) = xyz$

$(x + y)(xy + zx + zy + z^2) = 0$,

$(x + y)\big(x(y + z) + z(y + z)\big) = 0$, откуда $(x + y)(x + z)(y + z) = 0$,

Пусть, например, $x + y = 0$, $x = -y$, тогда $2021 \cdot z = 1, z = \frac{1}{2021}$

$x^{2021} + y^{2021} = x^{2021} + (-x)^{2021} = 0 \Rightarrow$

$x^{2021}+y^{2021}+z^{2021}=\left(\frac{1}{2021}\right)^{2021}=2021^{-2021}$

Задание 3

Решите уравнение : $(3x^4-12x+10)\cdot(-x^2+2x-2)=a^2-1$.

Ответ: при $a=0, x=1$.

Решение:

$(3x^4-12x+10)\cdot(-x^2+2x-2)=a^2-1$

$$\Leftrightarrow (3x^4-12x+10)\cdot(x^2-2x+2)=1-a^2$$

Рассмотрим функцию y_1=$3x^4-12x+10$, ее производная

$$y_1'=12x^3-12=12(x^3-1)=0, x=1-\text{точка минимума},$$

Минимум функции $y_1=y_1(1)=1$,тогда $y_1\geq 1$

Функция $y_2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$, а поэтому $y_1\cdot y_2\geq 1$.

С другой стороны, $1-a^2\leq 1$, поэтому равенство возможно когда $1-a^2=1$, то есть при $a=0$ и $y_1\cdot y_2=1$, то есть при $x=1$.

Задание 4

Сравните числа: $a^{log_b a^2}$ и $b\cdot b^{(log_b a)^2}+a$, если $a=2021, b=2020$.

Решение:

$a^{log_b a^2}=a^{2\log_b a}$, $\quad b\cdot b^{(log_b a)^2}+a=b\cdot a^{\log_b a}+a$

Рассмотрим разность $a^{2\log_b a}-b\cdot a^{\log_b a}-a$

Пусть $a^{\log_b a}=x$, тогда получим трехчлен x^2-bx-a.

В случае $a=2021, b=2020$, трехчлен имеет вид $x^2-2020x-2021$, где $x=2021^{\log_{2020}2021}$. Так как $\log_{2020}2021>1$, то $x>2021$, поэтому

$$x^2-2020x-2021=(x+1)(x-2021)>0$$

$x^2-bx-a>0$, т.е. $x^2>bx+a$, откуда

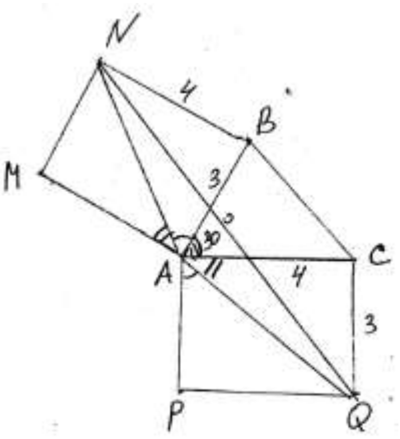
$$2021^{2\cdot\log_{2020}2021}>2020\cdot 2021^{\log_{2020}2021}+2021$$

Задание 5

На сторонах АВ *и* AC остроугольного треугольника *ABC* вовне построены два равных прямоугольника *AMNB* и APQC. Найдите расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если *AB*=3, *AC*=4, а угол при вершине *A* треугольника равен 30°.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

Решение:



Проведем диагонали AN и AQ. Соединим точки N и Q. Надо найти NQ.

Т.к. прямоугольника AMNB и APQC равны, то AN = AQ = 5, $\angle NAB = \angle PAQ, \angle MAN = \angle QAC$

$\angle NAD = \angle NAB + \angle QAC + \angle A = 90° + 30° = 120°$

По теореме косинусов

$NQ^2 = AN^2 + AQ^2 - 2 \cdot AN \cdot AQ \cdot \cos \angle NAD$

$NQ^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \cos 120° = 75$,

откуда $NQ = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Критерии определения победителей и призеров заключительного этапа олимпиады

Класс/место	Победитель 1 место	Призер II место	Призер III место
8 класс	100-70	69-55	54-50
9 класс	100-70	69-55	54-50
10 класс	100-75	74-50	49-45
11 класс	100-95	94-90	89-81

Материалы заданий олимпиады по математике 2021-2022 учебного года

5 КЛАСС

Задание 1

Девочка зашифровала свое имя с помощью номеров букв русского алфавита. В итоге имя стало таким: 11810151. Как зовут девочку?

Ответ: Арина

Решение: Числу 1 соответствует буква А, тогда 18 – Р, 10 – И, 15 – Н, получилось имя Арина. Если взять первые две цифры, т.е. 11, то получится, что имя начинается на Й, затем 8 – Ж, что невозможно.

Задание 2

В доме живут люди, кошки и попугаи. Посчитали, что общее число голов было 10, хвостов – 7, клювов – 3. Сколько всего было ног?

Ответ: 28.

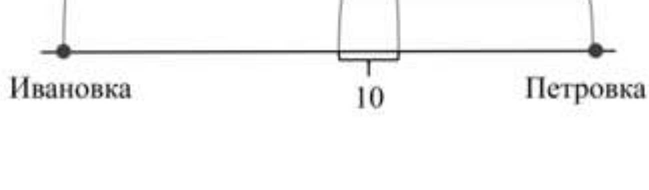
Решение: Так как 3 клюва, то в доме живут 3 попугая. Так как попугаев 3 и хвостов – 7, то кошек – 4. Так как 10 голов, то живут 3 человека. Считаем количество ног: людей–3, ног–6, попугаев–3, ног–6, кошек–4, ног–16. Итого: 28 ног.

Задание 3

Вася ехал на машине из Ивановки в Петровку. По пути он встретил указатель «До Петровки 50 км». Проехав еще 10 км, Вася увидел указатель «До Ивановки 100 км». Каково расстояние (в километрах) от Ивановки до Петровки?

Ответ: 140 км.

Решение: Из схемы видно, что расстояние между Ивановкой и Петровкой 140 км



<u>Задание 4</u>

На некоторой книжной полке книги стоят в один ряд. Самая большая и самая маленькая книги обе стоят вплотную к самой старой книге. Слева от самой большой книги стоят 20 книг, а справа от самой маленькой – 17 книг. Сколько книг может стоять на этой полке? Укажите в ответе наименьшее возможное число книг.

Ответ: 36.

Решение:

1. Рассмотрим случай, когда слева от самой старой стоит самая маленькая, а справа- самая большая. Так как слева от самой большой книги стоят 20 книг, то слева от самой маленькой стоят какие-то 18 книг, а т.к. справа от самой маленькой стоят 17 книг, то справа от самой большой стоят какие-то 15 книг. В этом случае будут всего 36 книг.

Какие-то 18 книг	Самая маленькая	Самая старая	Самая большая	Какие-то 15 книг

2. 18+3+16Если же слева от самой старой стоит самая большая, а справа – самая маленькая, в этом случае будет 20+3+17=40 книг.

Наименьшее возможное число книг будет в первом случае.

<u>Задание 5</u>

Боря и Витя решили копить деньги на новый телефон. 20 числа каждого месяца с января 2021 года Боря откладывал по 200 рублей, а Витя по 300 рублей. Однажды Боре надоело копить деньги, и он перестал их откладывать, но уже накопленные деньги тратить не стал. Витя продолжил копить. 1 мая 2022 года Витины сбережения были в 6 раз больше, чем Борины. В каком месяце Боря перестал копить? Укажите месяц и год.

Ответ: май, 2020 год.

Решение: Пусть x месяцев Боря откладывал по 200 рублей, за это время он скопил 200x рублей. К 1 мая 2021 года Витя откладывал 12+4 = 16 месяцев по 300 рублей и скопил 4800 рублей. В этот момент у него будет накоплений в 6 раз больше, чем у Бори. Получим уравнение $200x\cdot 6=4800$, откуда $x=4$, т.е. в апреле Боря еще будет откладывать деньги, а в мае перестанет.

6 КЛАСС

Задача 1

На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Все отобранные юниоры набрали по 22 очка, а каждый из мастеров – по 47 очков. Среднее число очков всей команды – 41. (Среднее число очков – это общее число очков, набранное группой участников, деленное на их количество). Сколько процентов составляют мастера в этой команде от общего числа участников?

Ответ: 76%

Решение: Пусть в команде x юниоров и y мастеров, тогда общее число очков, набранное командой 22x+47y= 41(x+y), откуда находим 6y=19x. Поэтому доля мастеров равна $\frac{y}{x+y} = \frac{y}{\frac{6y}{19}+y} = \frac{19}{25} = 0{,}76$, т.е. 76%

Задача 2

В 8:00 рейсовый автобус выехал из города А и поехал в сторону города Б со скоростью 64 км/ч. Доехав до города Б, он сразу же развернулся и поехал обратно. В 12:30 автобусу оставалось 10 км до города А. Все время движения автобус ехал с постоянной скоростью. Сколько километров от одного города до другого?

Ответ: 149.

Решение: Пусть S – расстояние от A до B.
С 8:00 до 12:30 автобус ехал 4,5 часа со скоростью 64 км/ч. За это время он проехал 64·4,5 = 288 км. Если бы он проехал еще 10 км, то он бы проехал удвоенное расстояние от A до B, т.е. 2·S = 288+10, откуда S = 149 км.

Задача 3

На шахматном турнире Остап Бендер должен сыграть 15 партий. В какой-то момент во время турнира Остап отметил, что на данный момент он выиграл ровно треть сыгранных партий, а проиграл ровно четверть сыгранных партий (остальные уже сыгранные партии закончились вничью). Сколько еще партий осталось сыграть Остапу?

Ответ: 3 партии.

Решение: То, что от сыгранных Остапом партий можно найти треть и четверть, означает, что число сыгранных партий делится на 3 и 4. Значит, оно делится на 12, а так как оно меньше 15, то количество сыгранных партий равно 12. Поэтому Остапу осталось сыграть 3 партии.

Задача 4

Вася утверждает, что тратит 1/3 суток на сон, 1/4 часть суток – на занятия в школе, 1/5 часть суток – на встречи с друзьями, 1/6 часть всего времени слушает музыку, 1/7 – играет на компьютере. Можно ли так жить, если он не совмещает эти дела?

Решение: Найдем сумму $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{459}{420}$, что больше 1. Поэтому так жить нельзя.

Задача 5

Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого разные, а их произведение равно числу 1512.

Ответ: 974321

Решение: Разложим число на простые множители
$1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$
В записи числа можно использовать цифры (по одному разу!) 1, 2, 3, 7, 9 (3· 3), 4 (2· 2). Цифру 6 (2· 3) использовать не следует, так как это уменьшает запись числа на один разряд. Из предложенного набора цифр наибольшее число - 974321.

7 КЛАСС

Задание 1

Если положительное число А возвести в шестую степень, то получится число в два раза больше А. Во сколько раз увеличится результат, если А возвести в шестнадцатую степень?

Ответ: в 8 раз.

Решение: По условию $A^6 = 2A,\ A > 0$, тогда $A^5 = 2$.
Найдем $A^{16} = A^{10} \cdot A^6 = A^{5\cdot 2} \cdot 2A = 4 \cdot 2A = 8A$

Задание 2

За тремя двухместными партами, стоящими друг за другом, сидят Артем, Боря, Вова, Гриша, Дима и Женя. Других учеников в классе нет.

Известно, что:

- Дима постоянно отвлекает сидящего перед ним ученика;
- Боря смотрит в затылок Жене;
- Артем и Гриша – близкие друзья и сидят за одной партой;
- Учитель запретил Вове и Жене сидеть за одной партой.

Кто сидит за второй партой?

Решение: По условию Артем и Гриша сидят за одной партой. Боря сидит за Женей, и так как Вова и Женя не могут сидеть за одной партой, то Боря сидит с Вовой, а Женя с Димой. Дима отвлекает сидящего перед ним ученика, поэтому Женя с Димой не сидят на первой парте, а так как Боря сидит за Женей, то Вова и Боря сидят на 3 парте, Женя с Димой на 2-ой, а Артем и Гриша – на первой.

Задание 3

В таблице 12 строк и несколько столбцов. Егор расставил в клетки таблицы числа так, что сумма чисел в каждой строке равна 9, а сумма чисел в каждом столбце равна 6. Сколько столбцов в таблице?

Ответ: 18

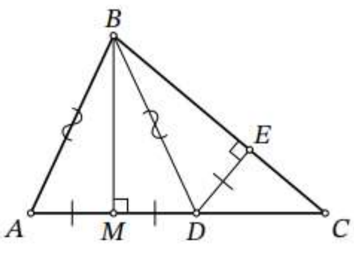
Решение: Пусть N – число столбцов в таблице, а сумма чисел в каждом столбце равна 6, тогда $6N$ –сумма всех чисел в таблице. Так как в таблице 12 строк и сумма чисел в каждой строке равна 9, то $12 \cdot 9 = 108$ – сумма всех чисел в таблице. Значит $6N = 108$, откуда $N = 18$

Задание 4

На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Известно, что $AB = BD, \angle ABD = 46°, \angle DEC = 90°$. Найдите $\angle BDE$, если известно, $2DE = AD$.

Ответ: 67°

Решение:



Проведем высоту BM в ΔABD.

Так как ΔABD – равнобедренный, то $MD = \frac{1}{2}AD = DE$. Тогда $\Delta BMD = \Delta BDE$ по гипотенузе (BD – общая) и катету ($MD = DE$), откуда

$$\angle BDE = \angle BDA = \frac{180° - \angle ABD}{2} = \frac{180° - 46°}{2} = 67°$$

Задание 5

В специализированном лицее ровно две трети всех парней и ровно седьмая часть всех девушек занимаются киберспортом. Всего же ровно треть лицеистов занимается этим видом спорта. Сколько в лицее парней и девушек, если известно, что в лицее не более 40 человек?

Ответ: 21 девушка и 12 парней.

Решение: Пусть в лицее $x-$ девушек и $y-$парней. Из условия задачи получим уравнение $\frac{1}{7}x+\frac{2}{3}y=\frac{1}{3}(x+y)$, которое после преобразования имеет вид $4x=7y$. Из условия и полученного соотношения следует, что число x делится на 3 и на 7, поэтому делится на 21. Пусть $x=21n,$ где $n-$ натуральное число. Тогда $7y=4\cdot 21n$, $y=12n$ и $x+y=21n+12n=33n$ учеников. По условию $33n\leq 40$, значит $n=1$. В лицее $x=21n=21$ девушка и $y=12n=12$ парней.

8 КЛАСС

Задание 1

Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

Решение: Пусть x и y данные натуральные числа. Тогда $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$. Тогда $xy+1=x(x+2)+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Задание 2

Илья, Денис, Кирилл и Игорь посещают разные кружки – борьбу, плавание, теннис и баскетбол. Илья занимается не борьбой, не теннисом и не плаванием. Денис - не плаванием и не борьбой. Кирилл - не борьбой. Чем занимается каждый из мальчиков?

Ответ: Илья – баскетболом, Денис – теннисом, Кирилл – плаванием, Игорь - борьбой.

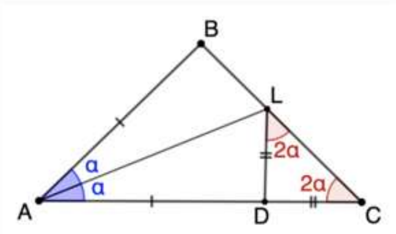
Решение: Т.к. Илья не занимается борьбой, теннисом и плаванием, то он занимается баскетболом. Т.к. Денис не занимается плаванием, борьбой и баскетболом, то он занимается теннисом. Кирилл не занимается борьбой, теннисом и баскетболом, поэтому он занимается плаванием. Остается Игорь, который занимается борьбой.

Задание 3

На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. В треугольнике провели биссектрису AL (точка L лежит на отрезке BC). Найдите длину стороны АС, если АВ=1 и $DL = DC$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение:



Пусть $\angle BAL = \angle DAL = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$. Так как $\Delta\, ABC -$ равнобедренный, то $\angle C = \angle A = 2\alpha$. Так как $DL = DC,$ то $\angle DLC = \angle C = 2\alpha$. $\angle ADL = 4\alpha,$ как внешний угол ΔDLC. $\Delta ABL = \Delta ALD$ по двум сторонам и углу между ними($AD = AB, AL -$ общая, $\angle BAL = \angle DAL,$ откуда $\angle B = \angle ADL = 4\alpha$

По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°,$ т.е. $2\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180°$, $8\alpha = 180°, \angle BCA = 2\alpha = 45°$. Треугольник ABC оказался прямоугольным равнобедренным, следовательно АС=$\sqrt{2}$.

Задание 4

Вычислите $x^3 + \frac{1}{x^3}$, если известно, что $x + \frac{1}{x} = 3$.

Ответ: 18.

Решение: Воспользуемся формулой $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

Откуда, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 9 = 18$

Задание 5

Пусть $a, b, c -$ стороны треугольника. Докажите, что $(a^2 - b^2 - c^2)^2 < 4b^2c^2$.

Решение:

Нужно доказать, что $(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$. Разложим левую часть неравенства на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$$
$$= (a^2 - (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2)$$
$$= (a - b - c)(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

По неравенству треугольника первая скобка отрицательна, а третья и четвертая положительны, поэтому $(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$ и $(a^2 - b^2 - c^2)^2 < 4b^2c^2$.

9 КЛАСС

Задание 1

Сколько членов числовой последовательности 32, 28, 24, 20, 16..., начиная с первого, надо сложить, чтобы получить сумму, равную 132?

Ответ: 6 или 11.

Решение: Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$. По условию, $S_n = 132$, первый член арифметической прогрессии $a_1 = 32$, разность d = 28 – 32 = - 4. n-ый член арифметической прогрессии имеет вид $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 32 + (n-1) \cdot (-4) = 36 - 4n$. Тогда $132 = \frac{32+36-4n}{2} \cdot n$, $n^2 - 17n + 66 = 0$, $n_1 = 6$, $n_2 = 11$.

Задание 2

Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y – натуральные числа. Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy + 1$ – квадрат целого числа.

Решение:

По условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-2}$, откуда $\frac{x+y}{xy} = \frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$.

Так как $x + y$ положительно, то $xy = (x+2)(y-2)$. Откуда $y = x + 2$.

Тогда $xy + 1 = x(x+2) + 1 = (x+1)^2$.

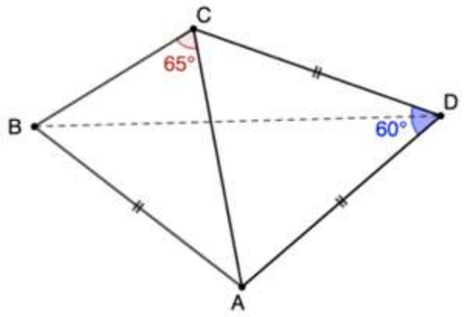
Задание 3

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ADC = 60°$, $AB = AD = DC$. Найдите $\angle ABD$, если $\angle BCA = 65°$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 35°

Решение:

Так как $\angle ADC = 60°$ и $AD = DC$, то $\angle ACD = \angle DAC = 60°$ и $AD = DC = AC$, откуда $AB = AC$ и $\angle ABC = \angle BCA = 65°$. По сумме углов ΔABC $\angle BAC = 180° - 130° = 50°$, тогда $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 110°$



Рассмотрим ΔABD

Так как $AB = AD,$ то $\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180° - 110°) = 35°$

Задание 4

Назовем натуральное число интересным, если произведение его цифр больше суммы его цифр. Найдите наименьшее интересное четырехзначное число.

Ответ: 1125.

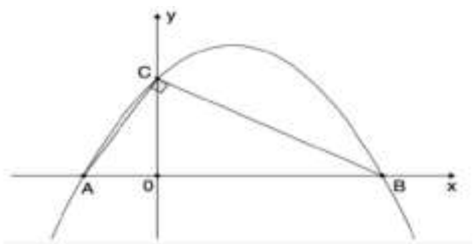
Решение: Пусть $\overline{xyzw}$ – четырехзначное число. Четырехзначное число интересное, если $x \cdot y \cdot z \cdot w > x + y + z + w$. Заметим, что если в числе есть ноль, то произведение его цифр равно 0 и оно заведомо меньше суммы цифр. Поэтому, среди интересных нет четырехзначных чисел, имеющих цифры, равные нулю. Рассмотрим числа вида $\overline{111a}$. Так как $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a < a + 2$, то эти числа тоже не могут быть интересными. Рассмотрим числа вида $\overline{112a}$. Произведение их цифр равно $2a$, а сумма $4 + a$. Если число интересное, то $2a > 4 + a,\ a > 4$. Наименьшее a, удовлетворяющее этому условию, это $a = 5$, и наименьшее интересное четырехзначное число это 1125.

Задание 5

На координатной плоскости изображена парабола – график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. Известны координаты точек $A(-5; 0)$ и $B(20; 0) -$ пересечения данной параболы с осью Ox. Точка $C -$ пересечение данной параболы с осью $Oy -$ расположена выше оси Ox. Также известно, что $\angle ACB = 90°$. Найдите коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена.

Ответ: -0,1.

Решение: Пусть $O -$ начало координат, тогда $CO -$ высота прямоугольного треугольника ABC. По теореме о перпендикуляре, проведенном из вершины прямого угла на гипотенузу $CO = \sqrt{AO \cdot OB} = \sqrt{5 \cdot 20} = 10$, Тогда точка C(0;10). Для нахождения число a подставим координаты точек A, Bи C в уравнение параболы.



Получим систему $\begin{cases} 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 400a + 20b + c \\ 10 = c \end{cases}$, решая которую находим $a = -0{,}1$.

10 КЛАСС

Задание 1

Три друга – Дима, Вова и Игорь – преподают геометрию, комбинаторику и теорию чисел; один из них работает в Санкт- Петербурге, другой – в Орле и третий – в Ростове-на-Дону. Дима работает не в Орле, Вова – не в Санкт-Петербурге, петербуржец преподает теорию чисел, орловец – не комбинаторику, Вова – не геометрию. Какой предмет преподает каждый из них?

Ответ: Вова- комбинаторику, Дима -теорию чисел, Игорь - геометрию.

Решение: Составим две таблицы

	геометрия	комбинаторика	теория чисел
Орел	+	–	–
Санкт-Петербург	–	–	+
Ростов-на-Дону	–	+	–

	геометрия	комбинаторика	теория чисел
Дима	–	–	+
Вова	–	+	–
Игорь	+	–	–

Посмотрим на то, что преподает Вова: он не из Санкт- Петербурга, поэтому не преподает теорию чисел, также он не преподает геометрию, значит он преподает комбинаторику. Вова преподает комбинаторику, значит он не из Орла. Вова: он не из Санкт- Петербурга и не из Орла, значит он из Ростова-на-Дону. Дима работает не в Орле и не в Ростове-на-Дону, значит он из Санкт- Петербурга, а поэтому преподает теорию чисел. Остается Игорь из Орла, который преподает геометрию.

Задание 2

Дано выражение $A = xy + yz + zx,$ где $x, y, z -$ целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1) \cdot A -$ квадрат целого числа.

Решение: По условию

$xy + yz + zx = (x + 1)(y - 2) + (y - 2)(z - 2) + (z - 2)(x + 1)$, откуда

$4x + y + z = 0, \quad x = -\frac{y+z}{4}$.

Тогда $(-1)\cdot A = -(xy + yz + zx) = -x(y+z) - yz = \frac{(y+z)^2}{4} - yz = \frac{(y+z)^2 - 4yz}{4} = \frac{(y-z)^2}{4} = (\frac{y-z}{2})^2$

Покажем, что число $\frac{y-z}{2}$ – целое. Так как $y + z = 4x$, то числа y и z одной четности, поэтому число $\frac{y-z}{2}$ – целое.

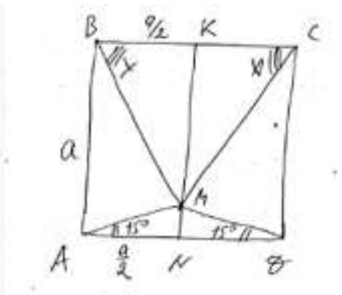
Задание 3

Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что угол $\angle ADM = \angle MAD = 15°$ Найдите угол BCM и радиус вписанной и описанной около треугольника MCB окружностей, если сторона квадрата равна 1.

Ответ: $60°$, $R = \frac{\sqrt{3}}{3}, r = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Решение: Обозначим сторону квадрата через а, искомый угол через x.

Т.к. ABCD квадрат, то $\angle MAD = \angle MDA = 15°, \angle CDM = \angle BAM = 75°$, тогда



$AM = MD$ и $\Delta ABM = \Delta CMD$. Из равенства треугольников ABM и CMD следует, что $BM = MC, \Delta BMC$ – равнобедренный и $\angle CBM = \angle BCM = x$.

Через точку M проведем $KN \parallel AB$, тогда $BK = AN = \frac{a}{2}$, $KN = a$ $KN = KM + MN = BK \cdot tgx + AN \cdot tg15°$, $a = \frac{a}{2}tgx + \frac{a}{2}tg15°, tgx + tg15° = 2$

Для нахождения $tg15°$, воспользуемся формулой

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, $tg15° = \frac{\sin 30°}{1+\cos 30°} = 2 - \sqrt{3}$

$tgx = 2 - tg15° = \sqrt{3}$, $x = 60°$, $KM = \frac{a}{2}tgx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$R = \frac{2}{3}KM = \frac{\sqrt{3}}{3}; r = \frac{1}{3}KM = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Так как треугольник MBC – равносторонний, то r=1/3 MK; R=2/3 MK.

Задание 4

При каких простых значениях натурального числа p число $8p^2+1$ также простое?

Ответ: при p=3

Решение: Прямой проверкой исследуем случаи p=2 и p=3:

p=2 → $8p^2+1=33$ – составное

p=3 → $8p^2+1=73$ – простое

Далее проверка по классам натуральных чисел с остатками 1 и 2 при делении на 3 (в случае p=3k, к>1 p не является простым):

p=3k+1, k ≥1 → $8(3k+1)^2+1=72k^2+48k+9$ - кратно 3;

p=3k+2, k ≥1 → $8(3k+2)^2+1=72k^2+96k+33$ - кратно 3, то есть для всех таких p число $8p^2+1$ является составным.

Задание 5

Найдите все решения уравнения
$(y(x-1))^2+(x-1)^2+y^2+1-4y|x-1|=0.$

Ответ: (0,1), (2,1).

Решение: Т.к. $|x-1|^2=(x-1)^2$, то преобразуем уравнение следующим образом $((y|x-1|)^2-2y|x-1|+1)+(\,|x-1|^2-2y|x-1|+y^2)=0$, $(y|x-1|-1)^2+(|x-1|-y)^2=0$, т.к. слагаемые неотрицательны, то равенство возможно при условии, что они одновременно будут равны нулю, т.е. получим систему $\begin{cases}(y|x-1|-1=0\\ \ |x-1|-y=0\end{cases}$, решения которой (0,1), (2,1).

11 КЛАСС

Задание 1

a) Делится ли число $2022^{2021}+2022^{2022}+2022^{2023}$ на 5?

b) При каких натуральных значениях a, не кратных 5, выражение $a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}$ кратно 5?

Ответ: а) не делится; в) таких, а не существует.

Решение:

a) Преобразуем сумму:
$2022^{2021}+2022^{2022}+2022^{2023}=2022^{2021}(1+2022+2022^2).$
Число в скобке заканчивается цифрой 7, следовательно, на 5 не делится.

b) $a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}$=$a^{2021}(1+a+a^2)$. Пусть $1+a+a^2=5k.$
Проанализируем наличие натуральных корней этого уравнения:
$a^2+a+1-5$k=0; D=20k-3=m^2; $20k=m^2+3$, то есть m^2 оканчивается цифрой 7, что не возможно. Следовательно, таких натуральных a не существует.

Задание 2

Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$, где x и y – натуральные числа. Если число x увеличить на 4, а число y уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+4$ – квадрат целого числа.

Решение: По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y-4}+\frac{1}{(x+4)(y-4)}$,

откуда $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y-4+x+4+1}{(x+4)(y-4)}$ или $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$.
Так как $x + y + 1$ положительно, то $xy = (x + 4)(y - 4)$, откуда $y = x + 4$. Тогда $xy + 4 = x(x + 4) + 4 = (x + 2)^2$.

Задание 3

Найти натуральные числа x и y, для которых $log_2\left(\frac{x}{17} + \frac{y}{5}\right) = log_2\frac{x}{17} + log_2\frac{y}{5}$

Ответ: $\begin{cases} x = 18, \\ y = 90; \end{cases} \begin{cases} x = 102, \\ y = 6; \end{cases} \begin{cases} x = 34, \\ y = 10; \end{cases} \begin{cases} x = 22, \\ y = 22. \end{cases}$

Решение: Перепишем исходное уравнение в виде
$log_2\left(\frac{x}{17} + \frac{y}{5}\right) = log_2\frac{xy}{85}$, откуда $\frac{x}{17} + \frac{y}{5} = \frac{xy}{85}$, $5x + 17y = xy$,
$xy - 5x - 17y + 85 = 85$, $x(y - 5) - 17(y - 5) = 85$
$(x - 17)(y - 5) = 85$
Рассмотрим всевозможные варианты

$x - 17$	1	85	17	5	-1	-85	-17	-5
$y - 5$	85	1	5	17	-85	-1	-5	-17
x	18	102	34	22	16	-68	0	12
y	90	6	10	22	-80	4	0	-12

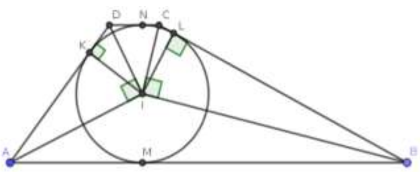
Отбирая натуральные решения, получаем ответ.

Задание 4

В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16, DK = 4, CD = 6$.

Ответ: 432.

Решение:



1) Пусть $M, L, N -$ точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD соответственно; пусть $I -$ центр вписанной окружности. Обозначим $r -$радиус вписанной окружности.

2) По свойству отрезков касательных $DN = KD = 4, AK = AM = 16$, очевидно, что $CN = CD - DN = 6 - 4 = 2$, тогда по свойству отрезков касательных $CL = CN$= 2.

3) Так как $I -$ центр вписанной окружности, то $I -$ точка пересечения биссектрис внутренних углов трапеции. Поэтому $\frac{\angle A + \angle D}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$,
Следовательно $\Delta AID -$ прямоугольный. Аналогично, $\Delta BIC -$ прямоугольный.

4) Так как IK и $IL -$ радиусы, проведенные к точкам касания, то $IK \perp AD, IL \perp BC$. По теореме о перпендикуляре, проведенном из вершины прямого угла на гипотенузу, $IK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{16 \cdot 4} = 8$
Аналогично, $IL^2 = CL \cdot BL, 8^2 = 2 \cdot BL, BL = 32$, тогда $BM = BL = 32$.
$AB = AM + BM = 16 + 32 = 48$.
5) Находим площадь трапеции

$$S_{\text{тр}} = \frac{AB + CD}{2} \cdot MN$$

Высота трапеции $MN = 2r = 2 \cdot 8 = 16$ и

$$S_{\text{тр}} = \frac{48 + 6}{2} \cdot 16 = 432$$

<u>Задание 5</u>

Сравните числа: $a^{log_b a^2}$ и $b \cdot b^{(log_b a)^2} + a$, если $a = 2022, b = 2021$.

Решение:
$a^{log_b a^2} = a^{2\log_b a}$, $b \cdot b^{(log_b a)^2} + a = b \cdot a^{\log_b a} + a$
Рассмотрим разность $a^{2\log_b a} - b \cdot a^{\log_b a} - a$
Пусть $a^{\log_b a} = x$, тогда получим трехчлен $x^2 - bx - a$.
В случае $a = 2022, b = 2021$, трехчлен имеет вид $x^2 - 2021x - 2022$, где $x = 2022^{\log_{2021} 2022}$. Так как $\log_{2021} 2022 > 1$, то $x > 2022$, поэтому $x^2 - 2021x - 2022 = (x + 1)(x - 2022) > 0$
$x^2 - bx - a > 0$, т.е. $x^2 > bx + a$,
откуда $2022^{2\cdot\log_{2021} 2022} > 2021 \cdot 2022^{\log_{2021} 2022} + 2022$.

Критерии определения победителей и призеров заключительного этапа олимпиады

Класс/место	**Победитель 1 место**	**Призер II место**	**Призер III место**
5 класс	100	99-90	89-80
6 класс	100-85	84-80	79-75
7 класс	100	99-80	79-65
8 класс	100-70	69-60	59-55
9 класс	100-90	89-60	59-45
10 класс	100-80	79-50	49-45
11 класс	100-80	79-60	59-40