Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ 2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

КЛАСС 8

Вариант 1

Задание 1 (25 баллов)

Сложите числа $1\underbrace{2\dots2}_{n-1}1$ и $(\underbrace{3\dots3}_{n})^2$

Решение:

$$1\underbrace{2\dots2}_{n-1}1+(\underbrace{3\dots3}_{n})^2=11\cdot\underbrace{11\dots1}_{n}+9\cdot(\underbrace{11\dots1}_{n})^2=11\cdot A+9A^2=$$

$$=A(9A+11)=A(9A+1+10)=\underbrace{11\dots1}_{n}\left(\underbrace{11\dots1}_{n}+10\right)=$$

$$=\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{00\dots0}_{n}+\underbrace{11\dots1}_{n}0=\underbrace{11\dots1}_{n-1}2\underbrace{11\dots1}_{n-1}0,\text{ где } A=\underbrace{11\dots1}_{n},$$

$$9A+1=\underbrace{99\dots9}_{n}+1=1\underbrace{00\dots0}_{n}$$

Ответ: $\underbrace{11\dots1}_{n-1}2\underbrace{11\dots1}_{n-1}0$

Задание 2 (25 баллов)

Отрезок числовой оси $[0;6]$ разбит точками $0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<6$ на n отрезков: $[0;\ x_1]; [x_1;x_2];\dots[x_{n-1};6]$. На каждом из отрезков, как на основании, достроили квадрат. Может ли сумма площадей этих квадратов оказаться меньше $\frac{1}{100}$?

Решение:

Разобьем отрезок на 10^k равных по длине отрезков. Тогда длина отрезка будет $\frac{6}{10^k}$; квадрат, построенный на этом отрезке, будет иметь площадь $\frac{36}{10^{2k}}$. Общая сумма площадей равна $S=10^k\cdot\frac{36}{10^{2k}}=\frac{36}{10^k}$.

Найдем, при каком k сумма площадей этих квадратов $S<\frac{1}{100}$:

$$k=2,\qquad S=\frac{36}{100}>\frac{1}{100}$$

$k = 3, \qquad S = \frac{36}{1000} > \frac{10}{1000}$

$k = 4, \qquad S = \frac{36}{10000} < \frac{1}{100}$

При $k \geq 4$, $S < \frac{1}{100}$.

Ответ: может.

Задание 3 (20 баллов)

На часах со стрелками 20 часов 25 минут и 26 секунд. Какой (меньший) угол в этот момент образовали часовая и минутная стрелки?

Решение:

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает $\left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right)$ часов, минутная стрелка показывает $\left(25 + \frac{26}{60}\right)$ минут.

Часовая стрелка имеет угловую скорость $30\,{}^{\circ}/_{\text{час}}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол

$$\alpha = \left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right) \cdot 30\,{}^{\circ}/_{\text{час}} = \left(240 + \frac{25}{2} + \frac{13}{60}\right)^{\circ} = 252\frac{43}{60}{}^{\circ}.$$

Минутная стрелка имеет угловую скорость $6^{\circ}/\text{мин}$, поэтому от момента времени 08ч 00м 00с она повернется на угол

$$\beta = \left(25 + \frac{26}{60}\right) \cdot 6\,{}^{\circ}/_{\text{мин}} = \left(150 + \frac{26}{10}\right)^{\circ} = 152\frac{3}{5}.$$

Найдем угол между часовой и минутной стрелками

$$\alpha - \beta = 252\frac{43}{60} - 152\frac{3}{5} = 100\frac{7}{60}{}^{\circ}$$

Ответ: $100\frac{7}{60}$ **градусов.**

Задание 4 (15 баллов)

Докажите, что число $2027^{2028^{2029}} + 2024^{2025^{2026}}$ является составным?

Решение

Число 2028^{2029} кратно 4, что очевидно.

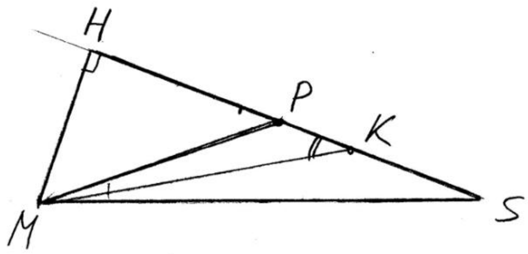
Число $2027^{2028^{2029}}$ имеет последнюю цифру такую же, что и последняя цифра числа $7^{2028^{2029}}$. Так как $7^{4p} = (2401)^p$ всегда оканчивается на цифру 1, то последняя цифра числа $2027^{2028^{2029}}$ тоже 1.

Число 2025^{2026}- нечетное число. Число $4^{2k+1} = 16^k \cdot 4$ имеет последнюю цифру 4 при любом k, и поэтому число $2024^{2025^{2026}}$ оканчивается на 4.

Общая сумма оканчивается на 5, то есть делится на 5, следовательно, данное число является составным.

Ответ: число является составным.

Задание 5 (15 баллов)
В треугольнике MPS угол MPS равен $132°$. Высота, опущенная из вершины M в два раза меньше биссектрисы угла PMS. Найдите угол S.



Решение:
Поскольку в прямоугольном треугольнике MHK $MK = 2MH$, то $\angle MKH = 30°$.
В треугольнике
MPK $\angle PMK = 180° - 132° - 30° = 18°$,
$\angle PMS = 2 \cdot \angle PMK = 36°$
Следовательно, $\angle S = 180° - 36° - 132° = 12°$

Ответ: $12°$