Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ
2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

КЛАСС 10

Вариант 2

Задание 1 (20 баллов)

Первая машина везет 5 контейнеров, 4 бочки, 10 мешков общим весом 1820 кг. Вторая машина доставила 7 контейнеров, 20 бочек, 2 мешка общим весом 3100 кг. Какой вес доставляет третий грузовик, если он везет 11 контейнеров, 34 бочки, один мешок?

Решение

Пусть x кг – вес контейнера, y кг – вес бочки, z кг – вес мешка, тогда

$$\begin{cases} 5x + 4y + 10z = 1820 \\ 7x + 20y + 2z = 3100 \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения системы и вычитая из второго уравнения первое, получим систему

$$\begin{cases} 12x + 24y + 12z = 4920 \\ \ \ 2x + 16y - 8z = 1280 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 410 \\ x + 8y - 4z = 640 \end{cases}$$

Загрузка третьей машины

$$11x + 34y + z = 9(x + 2y + z) + 2(x + 8y - 4z) =$$
$$= 9 \cdot 410 + 2 \cdot 640 = 4970.$$

Ответ: 4970 кг.

Задание 2 (20 баллов)

Решите уравнение:

$$\sqrt[4]{2x^4 - 2(a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + a} -$$
$$-\sqrt[4]{-2x^4 + (2a+1)x^3 - (2+a)x^2 + (2a+1)x - a} = x\sqrt{-a-1}$$

Решение

Преобразуем подкоренные выражения, получим:

$$\sqrt[4]{(x-a)(x-1)(2x^2+1)}-\sqrt[4]{(x-a)(1-2x)(x^2+1)}=x\sqrt{-a-1}$$

Находим ОДЗ уравнения

$$\begin{cases} -a-1\geq 0 \\ (x-a)(x-1)(2x^2+1)\geq 0 \\ (x-a)(1-2x)(x^2+1)\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a\leq -1 \\ x\leq a; x\geq 1 \\ a\leq x\leq \frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow x=a$$

Таким образом, $x=a$ – единственная точка ОДЗ. Пусть $x=a$, тогда уравнение принимает вид:

$$\begin{cases} 0=a\sqrt{-a-1} \\ a\leq -1 \end{cases} \leftrightarrow a=-1$$

Ответ: $x=-1$ при $a=-1$.

Задание 3 (15 баллов)

Фирма реализует два вида товаров в количестве $n\ (n\geq 1)$ единиц товара первого вида и $m\ (m\geq 1)$ единиц товара второго вида. Известно, что m и n являются решениями уравнения $2m+4n=m\cdot n-10$. Максимальный доход фирма получает, если $n+m$ принимает наибольшее значение. Найдите такое (такие) значения n и m.

Решение:

$2m+4n=m\cdot n-10$

$mn-2m=4n+10$

$m(n-2)=4n+10$

$m=\dfrac{4n-8+18}{n-2}$

$m=4+\dfrac{18}{n-2}$

Находим натуральные пары значений n и m:

$n=3,\quad m=22\quad$ n+m=25

$n=4,\quad m=13\quad$ n+m=17

$n=5,\quad m=10\quad$ n+m=15

$n=8,\quad m=7\quad$ n+m=15

$n=11,\quad m=6\quad$ n+m=17

$n=20,\quad m=5\quad$ n+m=25

Наибольшее значение принимает сумма $n+m=25$ при $n=3,\ m=22$ и при $n=20,\ m=5$.

Ответ: 25 при $n=3,\ m=22$ или $n=20,\ m=5$.

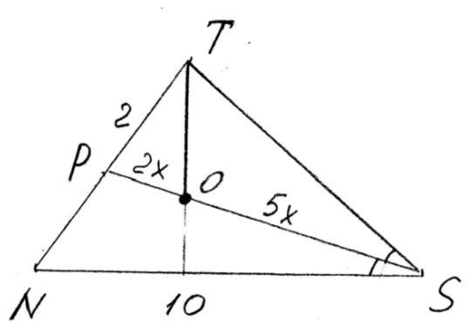
Задание 4 (25 баллов)

На часах со стрелками 20 часов 25 минут 26 секунд. Через сколько секунд впервые часовая и секундная стрелки образуют развернутый угол?

Решение:
На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.
В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает $\left(8+\frac{25}{60}+\frac{26}{3600}\right)$ часов, секундная стрелка показывает 26 секунд.
Часовая стрелка имеет угловую скорость $30\,{}^{\circ}/_{\text{час}}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол
$\alpha=\left(8+\frac{25}{60}+\frac{26}{3600}\right)\cdot 30\,{}^{\circ}/_{\text{час}}=\left(240+\frac{25}{2}+\frac{13}{60}\right)^{\circ}=252\frac{43}{60}{}^{\circ}$.
Секундная стрелка имеет угловую скорость $6^{\circ}/\text{сек}$, поэтому от момента времени 08ч 25м 00с она повернется на угол
$\beta=26\cdot 6\,{}^{\circ}/_{\text{мин}}=156^{\circ}$.
Найдем угол между часовой и секундной стрелками
$\alpha-\beta=252\frac{43}{60}-156=96\frac{43}{60}{}^{\circ}$.
Пусть секундная стрелка образует с часовой развернутый угол через t секунд. За это время часовая стрелка (угловая скорость $30\,{}^{\circ}/_{\text{час}}=\frac{1}{120}\,{}^{\circ}/_{\text{сек}}$) повернется на угол $\frac{1}{120}t$, а секундная стрелка (угловая скорость $6^{\circ}/\text{сек}$) - на $6t$; следовательно,
$6t=\alpha-\beta+\dfrac{1}{120}t+180,\qquad \dfrac{719}{120}t=96\dfrac{43}{60}+180,\qquad \dfrac{719}{120}t=276\dfrac{43}{60}{}^{\circ}$
$t=\frac{16603}{60}\cdot\frac{120}{719}=\frac{33206}{719}=46\frac{132}{719}$ сек.

Ответ: $46\frac{132}{719}$ **сек.**

Задание 5 (20 баллов)
Точка О – центр вписанной в ΔNTS окружности, SP-биссектриса угла при вершине S, $PT=2, NS=10$. Найдите радиус вписанной в ΔNTS окружности, если $PO:OS=2:5$.



Решение
Так как точка О – центр вписанной окружности и SP-биссектриса, то ТО- биссектриса ΔTSP, тогда $\frac{PT}{TS}=\frac{PO}{OS}, \frac{2}{TS}=\frac{2}{5}$, откуда $TS=5$
По свойству биссектрисы SP ΔNTS:
$\frac{NS}{TS}=\frac{NP}{PT}, \quad \frac{10}{5}=\frac{NP}{2}$, откуда $NP=4$.
Радиус вписанной окружности находим по формуле $S=p\cdot r, p=\frac{6+5+10}{2}=\frac{21}{2}$

$$S=\sqrt{p(p-6)(p-5)(p-10)}=\sqrt{\frac{21}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{21\cdot 11}}{4}$$

Тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{2}{21} \cdot \frac{3\sqrt{21 \cdot 11}}{4} = \frac{1}{2 \cdot 7}\sqrt{21 \cdot 11} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21 \cdot 11}{7 \cdot 7}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{7}}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{7}}$**.**