Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ 2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

КЛАСС 7

Вариант 1

Задание 1 (15 баллов)
Покажите, что число $2024^{2025^{2026}} + 2026^{2025^{2024}}$ кратно 10.

Решение
Число $2024^{2025^{2026}}$ оканчивается на ту же цифру, что и число $4^{2025^{2026}}$.
Так как число 2025^{2026} оканчивается на 5, то оно имеет вид 2025^{2026} =2k+1.
Число $4^{2k+1} = 4 \cdot 16^k$ всегда имеет последнюю цифру 4.
Следовательно, $2024^{2025^{2026}}$ оканчивается цифрой 4.
Число $2026^{2025^{2024}}$ оканчивается цифрой 6 (очевидно).
Исходное число заканчивается цифрой 0, следовательно данное число делится на 10.

Ответ: кратно 10.

Задание 2 (30 баллов)
Найдите сумму чисел $(\underbrace{3 \dots 3}_{n})^2$ и $\underbrace{4 \dots 4}_{n}$

Решение
Пусть $A = \underbrace{1 \dots 1}_{n}$, тогда

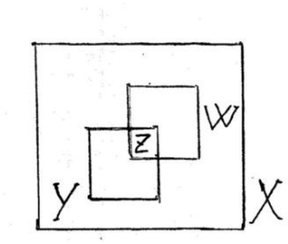
$$(\underbrace{3 \dots 3}_{n})^2 + \underbrace{4 \dots 4}_{n} = \left(3 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{n}\right)^2 + 4 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_{n} = 9A^2 + 4A = A(9A + 4) =$$

$$= A(9A + 1 + 3) = A\left(1\underbrace{0 \dots 0}_{n} + 3\right) = \underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{0 \dots 0}_{n} + \underbrace{3 \dots 3}_{n} = \underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{3 \dots 3}_{n}$$

Ответ: $\underbrace{1 \dots 1}_{n}\underbrace{3 \dots 3}_{n}$

Задание (15 баллов)

Среди жителей г. Ростова-на-Дону есть те, кто обожает осень, и те, кто предпочитает весну. Есть и такие, кто в равной степени любит и весну и осень. Известно, что доля «осенников» среди «весенников» больше, чем доля «осенников» по отношению ко всем жителям города. Сравните долю «весенников» среди «осенников» с долей «весенников» по отношению ко всем горожанам.



Решение

Обозначим W-число «весенников»,

Y - число «осенников»,

Z – количество любителей и весны и осени, X - число всех горожан. Тогда

$\frac{Z}{W}$ —доля «осенников» среди «весенников»

$\frac{Z}{Y}$ —доля «весенников» среди «осенников»

$\frac{W}{X}$ —доля «весенников» ко всем горожанам.

$\frac{Y}{X}$ —доля «осенников» ко всем горожанам.

Надо сравнить дроби $\frac{Z}{Y}$ и $\frac{W}{X}$

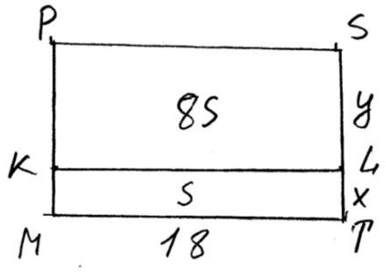
По условию $\frac{Z}{W} > \frac{Y}{X}$, откуда $ZX > WY \to \frac{Z}{Y} > \frac{W}{X}$

Ответ: доля «весенников» среди «осенников» больше, чем доля «весенников» среди всех горожан.

Задание 4 (15 баллов)

В прямоугольнике $MPST$ проведен отрезок KL параллельно стороне MT $K \in MP; L \in ST$. Площади получившихся прямоугольников отличаются в 8 раз. Найдите длины отрезков SL и LT, если MT в два раза больше ST и при этом $MT = 18$.

Решение:



1 случай:

Обозначим $LT = x, SL = y, ST = x + y,$

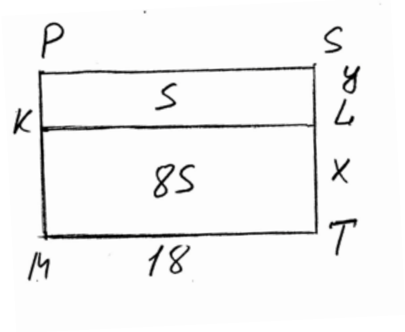
По условию, $MT = 2ST$, откуда $2(x + y) = 18$

$S_{MKLT} = 18x$, $8S = 18y$, откуда $\frac{8s}{s} = \frac{y}{x}$.

Получим систему $\begin{cases} 2(x+y) = 18 \\ \frac{8s}{s} = \frac{y}{x} \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 9 \\ y = 8x \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$

Ответ: $LT = 1, SL = 8$

2 случай



$S_{KPSL} = 18y$, $8S = 18x$, откуда $\frac{8s}{s} = \frac{x}{y}$.

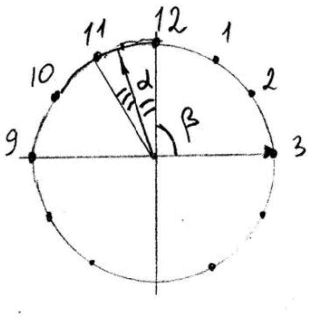
Получим систему $\begin{cases} 2(x+y) = 18 \\ \frac{8s}{s} = \frac{x}{y} \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 9 \\ x = 8y \end{cases} \to \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$

Ответ: $LT = 8, SL = 1$.

Задание 5 (25 баллов)

Часы со стрелками показывают время 11 часов 15 минут. Какой угол образуют в этот момент часовая и минутная стрелки? В ответе укажите меньший из двух.

Решение:



Отсчет будем вести от 11 часов 00 минут. В этот момент времени стрелки часов образуют острый угол $30°$. До момента времени 11 часов 15 минут минутная стрелка повернется на угол $\beta = 90°$. Часовая стрелка повернется за 15 минут (1/4 часа) на угол $\tilde{\alpha} = 30 \cdot \frac{1}{4} = 7{,}5°$, так как за час она поворачивается на $30°$. Поэтому $\alpha = 30° - 7{,}5° = 22{,}5°$.

Искомый угол равен $\alpha + \beta = 22{,}5° + 90° = 112{,}5°$.

Ответ: $112{,}5°$