

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР»  
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ  
2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

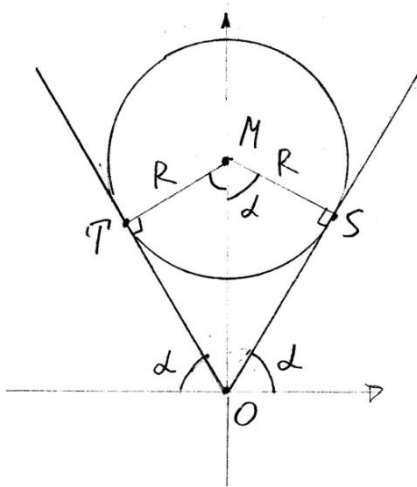
МАТЕМАТИКА

КЛАСС 9

Вариант 2

Задание 1 (20 баллов)

В график функции  $y = \sqrt{3} \cdot |x|$  вписана окружность радиуса  $R$ . Найти площадь фигуры, ограниченной дугой окружности и графиком функции.



Решение:

$$OS = R \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{OMS} = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{OTMS} = 2S_{OBC} = R^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{\text{сект}TMS} = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = R^2 \alpha$$

$$S_{TOS} = S_{OTMS} - S_{\text{сект}TMS} = R^2 \operatorname{tg} \alpha - R^2 \alpha = R^2 (\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$$

$$\text{Функция } y = \sqrt{3} \cdot |x| \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$S_{TOS} = R^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

Ответ:  $R^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$ .

Задание 2 (30 баллов)

В записи числа  $\underbrace{(33 \dots 35)}_{n-1}$  есть единицы и двойки. Каких цифр больше: единиц или двоек?

Решение:

$$\underbrace{33 \dots 35}_{n-1} = \underbrace{33 \dots 3}_n + 2 = 3 \cdot \left( \underbrace{11 \dots 1}_n \right) + 2 = 3A + 2,$$

где  $\underbrace{11 \dots 1}_n = A$ ,  $\underbrace{33 \dots 3}_n = 3A$ , так как  $9A = \underbrace{99 \dots 9}_n$ ,  $9A + 1 = \underbrace{10 \dots 0}_n$ , то

$$\underbrace{(33 \dots 35)}_{n-1}^2 = (3A + 2)^2 = 9A^2 + 12A + 4 = A(9A + 12) + 4 =$$

$$= A(9A + 1 + 11) + 4 = A(9A + 1) + 11A + 4 = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{00 \dots 0}_n + 11 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_n + 4 =$$

$$\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{00 \dots 0}_n + 1 \underbrace{22 \dots 222}_n 1 + 4 = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{00 \dots 0}_n + 1 \underbrace{22 \dots 2}_n 5 = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{22 \dots 2}_n 5 =$$

$$\underbrace{11 \dots 1}_{n-1} \underbrace{2 \dots 2}_n 5$$

**Ответ: двоек на одну больше, чем единиц.**

### Задание 3 (25 баллов)

На часах со стрелками 20 часов 25 минут 26 секунд. Через сколько минут секундная стрелка догонит часовую?

#### Решение

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает  $\left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right)$  часов, секундная стрелка показывает 26 секунд.

Часовая стрелка имеет угловую скорость  $30^\circ/\text{час} = \frac{1}{2}^\circ/\text{мин} = \frac{1}{120}^\circ/\text{сек}$ . Секундная стрелка имеет угловую скорость  $360^\circ/\text{мин} = 6^\circ/\text{сек}$ .

Часовая стрелка от момента времени 00ч 00м 00сек повернется на угол

$$\alpha = \left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right) \cdot 30^\circ/\text{час} = \left(240 + \frac{25}{2} + \frac{13}{60}\right)^\circ = 252 \frac{43}{60}^\circ.$$

Секундная стрелка от момента времени 08ч 25м 00с повернется на угол

$$\beta = 26 \cdot 6^\circ/\text{сек} = 156^\circ.$$

Найдем угол между часовой и секундными стрелками

$$\alpha - \beta = 252 \frac{43}{60} - 156 = 96 \frac{43}{60}^\circ.$$

Пусть через  $t$  секунд секундная стрелка догонит часовую. До этого момента, часовая стрелка пройдет дугу  $\frac{1}{120}t$ , секундная стрелка пройдет дугу  $6t$ , тогда

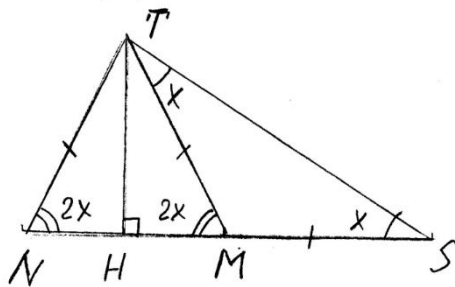
$$6t = (\alpha - \beta) + \frac{1}{120}t, \quad 6t = 96 \frac{43}{60} + \frac{1}{120}t \rightarrow \frac{719}{120}t = \frac{96 \cdot 60 + 43}{60},$$

$$t = \frac{5803 \cdot 2}{719} = 16 \frac{102}{719} \text{ сек.}$$

**Ответ:  $16 \frac{102}{719}$  сек.**

### Задание 4 (15 баллов)

В остроугольном треугольнике  $NTS$  проведена высота  $TH$ . Оказалось, что  $SH = TN + NH$ , Сколько градусов составляет угол  $TNS$ , если  $\angle NTS = 75^\circ$ .



**Решение:**

Отметим на отрезке  $SH$  точку  $M$  такую, что  $MH = HN$ .  
 Так как  $SH = TN + NH$ , то  $MS = TN$ .

В  $\triangle NTM$  высота  $TH$  совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным,  $TN = TM$ ,  
 $\angle TNH = \angle TMH$ .

Пусть  $\angle TSN = x$ , т.к.  $MS = TN = TM$ , то  $\triangle TMS$  – равнобедренный,  $\angle MTS = \angle TSM = x$ , тогда

$\angle TMN = 2x$ ,  $\angle TNM = 2x$ ,  $\angle NTS = 180^\circ - 3x$ . Поскольку  $\angle NTS = 75^\circ$ ,  
 То  $75^\circ = 180^\circ - 3x$ ,  $3x = 105^\circ$ ,  $x = 35^\circ$ ,  $\angle TNS = 2x = 70^\circ$

**Ответ:**  $70^\circ$

**Задание 5 (10 баллов)**

Три программиста пишут совместную программу, причем каждый из них может ее написать за одно и тоже время. Если эту программу будут писать два программиста, то они ее напишут за 2,5 часа. За какое время программисты напишут эту же программу все трое вместе?

**Решение:**

Объем программы примем за 1.

Пусть за  $x$  часов напишет эту программу один программист, тогда его производительность  $\frac{1}{x}$ . Так как два программиста напишут эту вместе за 2,5 часа, то получим уравнение

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot 2,5 = 1, \text{ откуда } x = 5.$$

Пусть  $t$  часов - это время, за которое напишут программу все трое вместе, получим уравнение  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot t = 1$ , откуда  $t = \frac{5}{3}$  часа или за 1 час 40 мин.

**Ответ:** 1 час 40 минут.