Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2020/2021 уч. год

математика
предмет

ШИФР 10611444

Задание №1.

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=a \end{cases}$$

$x^2+y^2=z$

$x^2=z-y^2$

$x_1=\sqrt{z-y^2}$; $x_2=-\sqrt{z-y^2}$

$a_1=x_1+y+z=y+z+\sqrt{z-y^2}$

2) $a_2=x_2+y+z=y+z+(-\sqrt{z-y^2})=y+z-\sqrt{z-y^2}$

Ответ: при $\begin{cases} a_1=y+z+\sqrt{z-y^2} \\ a_2=y+z-\sqrt{z-y^2} \end{cases}$

Задание №2.

$\frac{\sin 2020}{\sin 2021}$ и $\frac{\sin 2022}{\sin 2023}$

$\frac{\sin(5\cdot 360+220)}{\sin(5\cdot 360+221)}$ $\frac{\sin(5\cdot 360+222)}{\sin(5\cdot 360+223)}$

$\frac{\sin 220}{\sin 221}$ $\frac{\sin 222}{\sin 223}$

$\frac{\sin(270-50^\circ)}{\sin(270-49^\circ)}$ $\frac{\sin(270-48^\circ)}{\sin(270-47^\circ)}$

$\frac{-\cos 50^\circ}{-\cos 49^\circ}$ $\frac{-\cos 48^\circ}{-\cos 47^\circ}$ $\Big|$ $:(-1)$ и $\cdot(-1)$ т.е. минусы сократятся

$\frac{\cos 50^\circ}{\cos 49^\circ} < \frac{\cos 48^\circ}{\cos 47^\circ}$ т.к $\cos 47^\circ < \cos 49^\circ \Rightarrow \frac{1}{\cos 47} > \frac{1}{\cos 49}$.

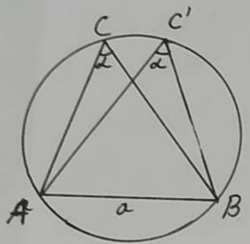
Следовательно

$\frac{\sin 2020}{\sin 2021} < \frac{\sin 2022}{\sin 2023}$

математика
предмет

ШИФР 10611444

Задание №3



1) Из всех тр-ков обладающих одинаковым основанием и углом при противолежащей вершине, больший периметр будет иметь тр-к у которого разность углов при основ. меньше (разность боковых сторон меньше) => таким тр-ком является равнобедренный треугольник.

2) По т. косинусов:

$$b^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\beta \Rightarrow b^2-b^2=a^2-2ab\cdot\cos\beta=a^2-2ab\cdot\cos\left(\frac{180^\circ-\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$=2ab\cdot\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=a^2$$

$$2\cdot b\cdot\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=a$$

$$b=\frac{a}{2\cdot\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$P=a+2b=a+2\cdot\frac{a}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}=a+\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+a}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cdot(\sin\frac{\alpha}{2}+1)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Ответ: $P=\frac{a\cdot(\sin\frac{\alpha}{2}+1)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

математика ШИФР 10611444
предмет

Задание №4.

$$\begin{cases} N+a=K^2 \\ N-b=M^2 \end{cases}$$

$N-b=M^2 \Rightarrow N=M^2+b$

$M^2+b+a=K^2$

$a+b=K^2-M^2$

$\left.\begin{matrix} a+b=2021=(K-M)\cdot(K+M) \\ 2021=43\cdot 47 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} K-M=43 \\ K+M=47 \end{matrix}\right\} \Rightarrow K=45;\ M=2$ – единст. корни

$\left.\begin{matrix} N-b=4 \Rightarrow N=4+b \text{ т.к } N=M^2+b=2^2+b=4+b \\ N+a=K^2=45^2=2025 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4+b+a=2025$

$\left.\begin{matrix} a+b=2025-4=2021 \\ a+b=2021 \text{ – по услов} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ условие выполняется

Рассмотрим два случая:

1) $a=1 \Rightarrow b=2020 \Rightarrow N_1=2024$

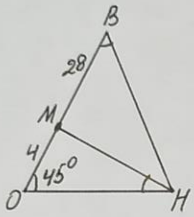
2) $a=2020 \Rightarrow b=1 \Rightarrow N_2=5$.

Число возможных $N = \Delta N = N_1-N_2 = 2024-5=2019$.

Ответ: Число возможных $N=2019$.

математика
предмет

ШИФР 10611444



Задание № 5.

Дано: $\triangle OBH$; $M \in OB$; $OM=4$; $MB=28$; $\angle OHM = \angle OBH$; $\angle BOH = 45^\circ$

Найти: $S_{\triangle OBH} = ?$

Решение:

1) $\left.\begin{array}{l}\angle OHM = \angle OBH \text{ – по услов} \\ \angle O \text{ – общий}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OMH \sim \triangle OHB$ (по 2-ум углам) $\Rightarrow \dfrac{OM}{OH} = \dfrac{OH}{OB} \Rightarrow OH^2 = OM \cdot OB$

$OH = \sqrt{OM \cdot OB} = \sqrt{4 \cdot 32} = 8\sqrt{2}$

2) $S_{\triangle OHM} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot OM \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 16.$

3) $\dfrac{S_{\triangle OHM}}{S_{\triangle OBH}} = K^2 = \left(\dfrac{OM}{OH}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{8\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$

$S_{\triangle OBH} = S_{\triangle OHM} \cdot 8 = 16 \cdot 8 = 128$

Ответ: $S_{\triangle OBH} = 128$