

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2022/2023 учебный год

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 8

ШИФР 61-8-М-6

Задание 1.

Дана окружность с центром в точке O и радиусом R . На окружности отметили две точки A и B так, что $\angle AOB = 20^\circ$. Докажите, что длина отрезка AB больше чем $\frac{1}{3}$ радиуса.

Задание 2.

Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил бы четверть второго танкера, то работа бы заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

Задание 3.

Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2023$. Решите уравнение $f(3 - x) = f(3x - 1)$

Задание 4.

На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2023. Случайно стерли одно из чисел. Выяснилось, что среднее арифметическое оставшихся чисел совпадает с удаленным числом. Какое число случайно стерли?

Задание 5.

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D . На отрезках AD и DC во внешнюю сторону от исходного треугольника построены равносторонние треугольники ADE и DCF .

- 1) При каком отношении $AD:DC$ треугольник DEF будет прямоугольным?
- 2) При каком отношении $AD:DC$ отношение площадей треугольников ABC и DEF будет минимальным?

1/2/3/4/5
20/15/15/25/15

Σ 95

МАТЕМАТИКА

ШИФР 61-8-М-6

предмет

№3 <...>

По т. Виета:

15

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$$

по т. обр. т. Виета:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} \quad \left| \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2} = 1,5, \text{ действительно,} \right.$$

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{и} \quad 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

По $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$ — это искоемые корни уравнения.

Ответ: $x = 1, x = \frac{3}{2}$.

№1. Из центра окр. O ~~нас построим 20 углов~~ ¹⁸

① Рассмотрим $\triangle AOB$. В $\triangle AOB$ OA и OB — радиусы окружности с центром в O радиуса R , то

$AO = OB = R$. Построим угол $\angle BOD = 20^\circ$ и $\angle DOE = 20^\circ$ (см. рис.), где $OD = OE = R$.

② Тогда в $\triangle OAB, \triangle OBD$ и $\triangle ODE$;

- 1) $AO = OB = OD = OE = R$
- 2) $\angle AOB = \angle AOD = \angle AOE = 20^\circ \quad | \Rightarrow$

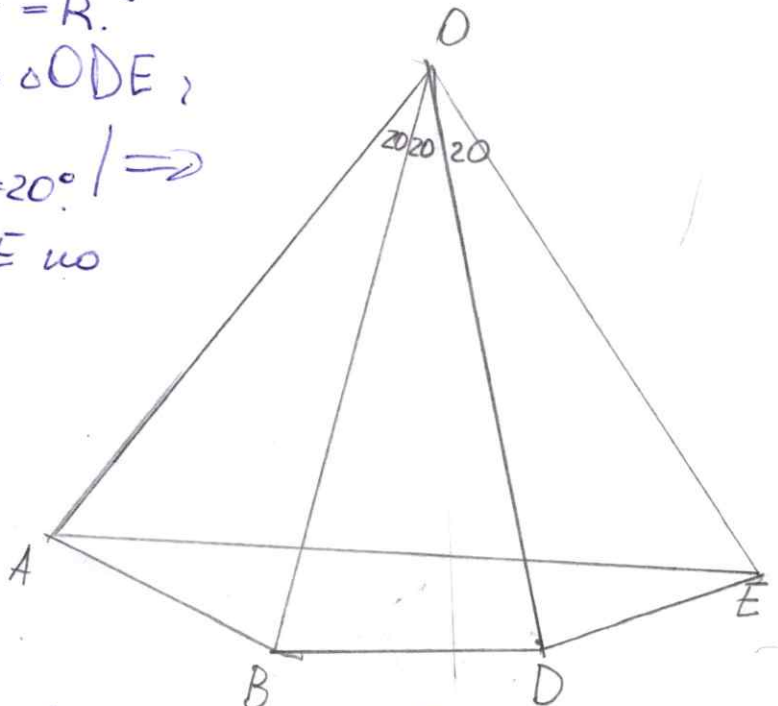
$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OBD = \triangle ODE$ по

I признаку. То $AB = BD = DE$.

③ В $\triangle AOE$

$$\left. \begin{array}{l} 1) AO = OE = R \\ 2) \angle AOE = \angle AOB + \angle BOD + \angle DOE = \\ = 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ \end{array} \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle AOE$ — равнобедр. с углом 60° , то $\triangle AOE$ — равносторонний, то $OE = AO = AE = R$.



стр 2 из 6

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 61-8-М-6

④. Рассмотрим отрезок AE и ломаную $ABDE$. Они оба – путь из A в E , но т.к. AE – часть прямой, то AE – кратчайший путь из A в E , то

$$AE < ABDE \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE < AB + BD + DE \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE < 3AB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R < 3AB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{3} < AB$$

ч.т.д.

№2.

15

① Пусть v – скорость, с которой качает воду каждый насос, S_1 – емкость 1-го танкера, S_2 – емкость 2-го танкера, то $\frac{S_2}{3v}$ – искомая величина

② 4 насоса наполнят 1-ый танкер за $\frac{S_1}{4v}$, а треть 2-го за $\frac{1}{3}S_2 = \frac{S_2}{12v}$. Всего они обработают $\frac{S_1}{4v} + \frac{S_2}{12v}$, а по условию 11 часов.

3 насоса наполняют S_1 за $\frac{S_1}{3v}$, а еще один насос четверть S_2 еще за $\frac{1}{4}S_2 = \frac{S_2}{4v}$, а по условию за 18 часов. Составим систему ур-ий.

СТР 3 из 6

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 61-8-М-6

$$\begin{cases} \frac{S_1}{48} + \frac{S_2}{120} = 11 \\ \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{4} = 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3S_1 + S_2}{120} = 11 \\ \frac{4S_1 + 3S_2}{120} = 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3S_1 + S_2 = 11 \cdot 120 \\ 4S_1 + 3S_2 = 18 \cdot 120 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12S_1 + 4S_2 = 4 \cdot 11 \cdot 120 \\ 12S_1 + 9S_2 = 3 \cdot 18 \cdot 120 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow вычтем из второго верхнее.

$$\Rightarrow 5S_2 = 3 \cdot 18 \cdot 120 - 4 \cdot 11 \cdot 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5S_2 = 360(18 \cdot 12 - 4 \cdot 11 \cdot 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{360} = \frac{18 \cdot 12 - 4 \cdot 11 \cdot 4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{360} = \frac{8(9 \cdot 3 - 11 \cdot 2)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{360} = \frac{8 \cdot 5}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{360} = 8 \text{ (ц) — исконое (см } \textcircled{1} \text{)}$$

Ответ: 89.

стр 4 из 6

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 61-8-М-6

№4.

25

Известно, что $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда

Сумма всех чисел от 1 до 2023 = $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$. Пусть
удалили число x , то сумма стала $\frac{2023 \cdot 2024}{2} - x$, а
ср. ариф. $A = \frac{\frac{2023 \cdot 2024}{2} - x}{2022}$, а по условию x . До

для всех x выполняется $\frac{\frac{2023 \cdot 2024}{2} - x}{2022} = x$ —
линейное, то x определяется однозначно.

$$\frac{\frac{2023 \cdot 2024}{2} - x}{2022} = x \Rightarrow \frac{2023 \cdot 2024}{2} - x = 2022x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2023 \cdot 1012 = 2023x \Rightarrow x = 1012 \text{ — искомое}$$

Ответ: 1012.

№3.

Т.к. $f(x) = x^2 - 5x + 2023$, то $f(3-x) = (3-x)^2 - 5(3-x) + 2023$ и
 $f(3x-1) = (3x-1)^2 - 5(3x-1) + 2023$, то

$$f(3-x) = f(3x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-x)^2 - 5(3-x) + 2023 = (3x-1)^2 - 5(3x-1) + 2023 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - 6x + x^2 - 15 + 5x + 2023 = 9x^2 - 6x + 1 - 15x + 5 + 2023 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 - x^2 - 6x - 15x - 5x + 6x + 1 + 5 - 9 + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 20x + 12 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{20}{8}x + \frac{12}{8} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0.$$

ср 1 из 6

МАТЕМАТИКА

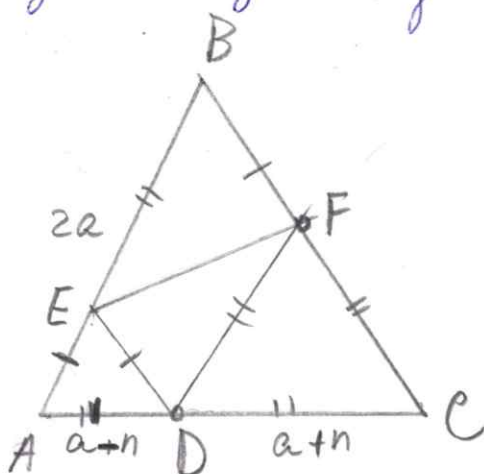
предмет

ШИФР 62-8-М-6

155

№ 5.

2). Построим $\triangle ADE$ и $\triangle DCF$ не внешним, а внутренним образом. Тогда луч AE совпадает с AB , и луч CF совпадает с CB . Пусть



тогда $\triangle DEF$ вписан в $\triangle ABC$, то $S_{DEF} \leq S_{ABC}$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} \min \Leftrightarrow S_{DEF} \max.$$

или уменьшае стороны, $CD \geq AD$. Пусть $AB = BC = AC = 2a$, то пусть $DC = a - n$. То $AD = a + n$. Заметим, что $BF = CB - CF \Rightarrow BF = AD = a + n$
 $\sim BE = AB - AE \Rightarrow BE = CD = a - n$. То в

$\triangle BEF$ и $\triangle EDF$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) DE = BF \\ 2) DF = BE \\ 3) EF - \text{общ} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\triangle BEF = \triangle EDF$, то

$$\begin{aligned} \triangle S_{BEF} &= S_{EDF}. \text{ Также, } S_{EDF} + S_{EFB} = 2(S_{EDF}) = \\ &= S_{ABC} - S_{ADE} + S_{CDF} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_{EDF} - \max, \text{ то } S_{ADE} + S_{CDF} - \min. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Тогда найдем сумму ~~нас~~ $S_{ADE} + S_{CDF}$.

стр 5 и 6

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 61-8-М-6

высота равностороннего Δ -ка равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ его стороны,

$$\text{то } S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a-n) \cdot (a-n) \text{ и } S_{CDF} = \frac{\sqrt{3}}{2} (a+n)(a+n) =$$

$$\Rightarrow (S_{ADE} + S_{CDF}) = \frac{\sqrt{3}}{2} (a-n)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} (a+n)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} ((a-n)^2 + (a+n)^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - 2an + n^2 + a^2 + 2an + n^2) =$$

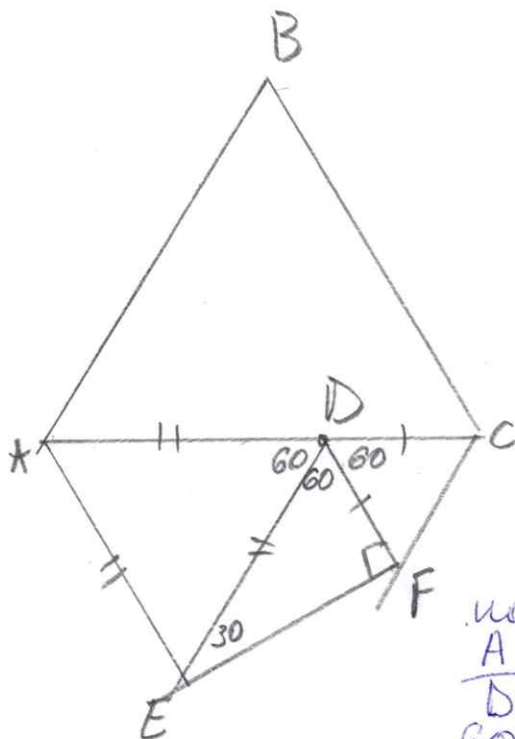
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (2a^2 + 2n^2) = \sqrt{3} (a^2 + n^2) \text{ принимает}$$

мин. значение, когда n^2 - миним.

$n^2 \geq 0$, то $n_{\min}^2 = 0$ достигается при

$n = 0$, тогда $(a+n) = (a-n) \Leftrightarrow (a+0) = (a-0)$, тогда $AD = CD$, то $\frac{AD}{CD} = 1$ - искомое.

1)



Если $\angle DEF = 90^\circ$, то

$$\text{в } \Delta EDF \angle D = 180^\circ - \angle ADE - \angle CDF = 180 - 60 - 60 = 60^\circ \text{ то}$$

$$\angle E = 180^\circ - \angle D - \angle F = 180 - 60 - 90 = 30^\circ$$

то DF в прямоугольном ΔDEF лежит против угла в 30° то

$$DF = 2 DE \Rightarrow \frac{DF}{DE} = 2 \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$. Если $\angle DEF = 90^\circ$, то

повторив рассуждения, получим, что $\frac{AD}{BC} = 2$. $\angle EDF \neq 90^\circ$, т.к. ни равен

60° (8-ю) выше. то
Ответ: 1) $2; \frac{1}{2}$ 2) 1. стрбизб