**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»**

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА**
**ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»**
**ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ**
**2022/2023 учебный год**

## ПО МАТЕМАТИКЕ

**КЛАСС 11**

**ШИФР** 57-11-М-10

**Задание 1.**

На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2023. Случайно стерли одно из чисел. Может ли среднее арифметическое оставшихся чисел совпасть с одним из оставшихся на доске чисел? Если да, то какое число было стерто?

**Задание 2.**

При каких значениях параметров А и В уравнение

$$x^2 + 4x \cdot cosA + y^2 - 2y \cdot cosB + 5 = 0$$

имеет решения. Найти эти решения.

**Задание 3.**

Сколько точек плоскости с натуральными координатами попадает на график кривой

$$x^2 + 2023 = 16y^2$$

при условии, что обе координаты – простые числа.

**Задание 4.**

Найдите точки максимума и минимума функции $y(x)$, которая определяется уравнением $3arcsinx + arccosy = \frac{\pi}{2}$

**Задание 5.**

Прямая, параллельная стороне $AC$ треугольника $ABC$, пересекает его стороны $AB$ и $BC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Медиана $AM$ пересекает отрезок $PQ$ в точке $N$. Длины отрезков $PN$ и $NQ$ равны 4 и 5. Найти длину стороны АС.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 10 | 15 | 5 | 20 |

$\Sigma$ 70

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр» для обучающихся 5-11 классов 2022/2023 уч. год

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 57-11-М-10

10 б

Задание 2.

$x^2+4x\cos A+y^2-2y\cos B+5=0$ Попробуем выделить полный квадрат.

$x^2+2\cdot x\cdot 2\cos A+4\cos^2 A-4\cos^2 A+y^2-2\cdot y\cdot\cos B+\cos^2 B-\cos^2 B+5=0$

$(x+2\cos A)^2+(y-\cos B)^2-4\cos^2 A-\cos^2 B+5=0$

$(x+2\cos A)^2+(y-\cos B)^2=4\cos^2 A+\cos^2 B-5.$

Заметим, что в левой части равенства – сумма двух квадратов, которая всегда больше или равна нулю. Во второй – вычитание из двух параметров константы, причём $\max(\cos^2 A)$ и $\max(\cos^2 B)=1$, т.е. $4\cos^2 A+\cos^2 B\le 5$. Тогда получим:

$(x+2\cos A)^2+(y-\cos B)^2\ge 0$

$4\cos^2 A+\cos^2 B-5\le 0.$ $\Rightarrow$ равенство будет достигаться только если выражения равны нулю, т.е. $\cos^2 A=1$ и $\cos^2 B=1$

$x=-2\cos A;\ y=\cos B$

$A=\pi k$ и $B=\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$

При $A=2\pi k,\ B=2\pi k:\ x,y=(-2;+1)$

$A=\pi+2\pi k,\ B=2\pi k:\ x,y=(2;+1)$

$A=2\pi k;\ B=\pi+2\pi k:\ x,y=(-2;-1)$

$A=\pi+2\pi k,\ B=\pi+2\pi k:\ x;y=(2;-1)$

Ответ: при $A,B=\pi k$, ~~при~~ $k\in\mathbb{Z}$. При $(A,B)=(2\pi k;2\pi n),\ (x,y)=(-2;1)$; при $(A,B)=(\pi+2\pi k;\ 2\pi n),\ (x,y)=(2;1)$; при $(A,B)=(2\pi k;\ \pi+2\pi n),\ (x,y)=(-2;-1)$; при $(A,B)=(\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi n),\ (x,y)=(2;-1)$

5 б

Задание 4

$3\arcsin x+\arccos y=\frac{\pi}{2}$ $\quad -1\le x\le 1\quad -1\le y\le 1$

$\arccos y=\frac{\pi}{2}-3\arcsin x$

$\cos(\arccos y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\arcsin x\right)$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

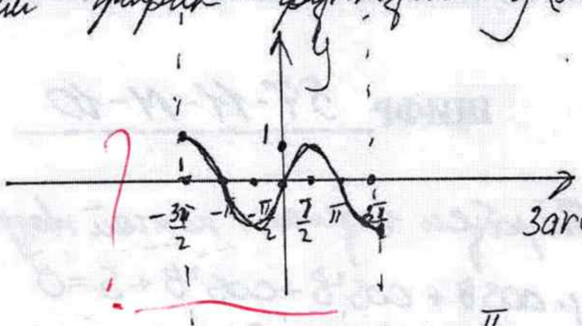
$y=\sin(3\arcsin x)$

$y(x)=\sin(3\arcsin(x))$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$-\frac{3\pi}{2}\le 3\arcsin x\le\frac{3\pi}{2}$

Задание 4 (продолжение)

Сделаем график функции $y(3\arcsin x)$




Заметим, что максимумы функции наблюдаются при $3\arcsin x = \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3\pi}{2}$, а минимумы при $3\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

$3\arcsin x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin x = \frac{\pi}{6}$ $\quad x = \frac{1}{2}$

$3\arcsin x = -\frac{3\pi}{2}$ $\quad \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad x = -1$

$3\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin x = -\frac{\pi}{6}$ $\quad x = -\frac{1}{2}$

$3\arcsin x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = 1$

Ответ: максимум – при $x = \frac{1}{2}$ и при $x = -1$ $(y = 1)$, а минимум при $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$ $(y = -1)$.

15б

Задание 3

$x, y \in N$ и $x, y$ – простые. $1^{*}$ $4y - x < 4y + x$, т.к. $x, y \in N$

$2023 \mid 7$
$289 \mid 17$
$17 \mid 17$
$1$

$x^2 + 2023 = 16y^2$

$16y^2 - x^2 = 2023$ $\quad (4y - x)(4y + x) = 2023$

$2023 = 1 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 = 119 \cdot 17$. Получаем, что для множителей $(4y-x)^{*}$ и $(4y+x)^{*}$ соответственно могут выполняться равенства с 8 как

$1^{*}$ $\begin{cases} 4y - x = 1 \\ 4y + x = 2023 \end{cases}$ $+ =$ $\quad 8y = 2024$ $\quad y = 253$ $\quad x = 1011$ $\quad \varnothing$ (т.к. $x \vdots 3$)

$\begin{cases} 4y - x = 7 \\ 4y + x = 289 \end{cases}$ $+ =$ $\quad 8y = 296$ $\quad y = 37$ $\quad x = 141$ $\quad \varnothing$ (т.к. $x \vdots 3$)

$\begin{cases} 4y - x = 17 \\ 4y + x = 119 \end{cases}$ $+ =$ $\quad 8y = 136$ $\quad y = 17$ $\quad x = 51$ $\quad \varnothing$ (т.к. $x \vdots 3$)

Как мы видим, во всех возможных случаях $x$ кратно 3, т.е. нет ни одной такой точки, где обе координаты – простые числа.

Ответ: 0 точек.

Рассмотрены все случаи

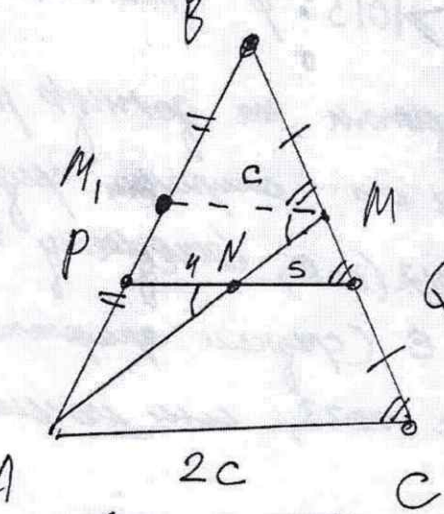
Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2022/2023 уч. год

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 57-11-М-10

20б

Задание 5.




Итак, для решения задачи сделаем дополнительное построение: начертим среднюю линию $\triangle ABC$, параллельную основанию $AC$. Она пересечёт точку $M$, принадлежащую медиане $AM$, а также прямую $AB$ в точке $M_1$. Пусть $MM_1 = c$, тогда $AC = 2c$, т.к. средняя линия тр. вдвое меньше прилежащего основания. $\triangle MNQ \sim \triangle AMC$, т.к. $\angle AMC$ – общий, а $\angle ACM = \angle NQM$ как соответственные при $PQ \parallel AC$ (из условия) и секущей $BC$.
$\triangle APN \sim \triangle AMM_1$, т.к. $\angle M_1AM$ – общий, а $\angle M_1MA = \angle PNA$ как соответственные при $MM_1 \parallel PQ$ (т.к. $PQ \parallel AC$ и $MM_1 \parallel AC$, то $MM_1 \parallel PQ$) и секущей $AM$. Тогда $\frac{AN}{AM} = \frac{4}{c}$, т.е. $AN = \frac{4}{c} AM$. $\frac{MN}{MA} = \frac{5}{2c}$;
а $MN = \frac{5}{2c} AM$. В то же время $AN + NM = AM$, т.к.
$\frac{4}{c} AM + \frac{5}{2c} AM = AM$ $\quad \frac{4}{c} + \frac{5}{2c} = 1$ $\quad 4 + \frac{5}{2} = c$ $\quad c = 6{,}5$
$2c = 13$ $\quad AC = 13$

Ответ: $AC = 13$

Задание 1.

20б

$S = \{1; 2; 3; \ldots; 2023\}$
Изначальная сумма чисел равна $s = \frac{1+2023}{2} \cdot 2023 = \frac{2024}{2} \cdot 2023 = 1012 \cdot 2023$
Пусть стёрли число $x$, тогда сумма станет равна $1012 \cdot 2023 - x$, а количество чисел – 2022. Тогда среднее арифметическое будет равно $\frac{1012 \cdot 2023 - x}{2022}$, обозначим его за „$\varepsilon$". Так как число $x$ исключено, то $\varepsilon \neq x$, а также $\varepsilon \in N$ и $\varepsilon \in [1; 2023]$. $\frac{1012 \cdot 2023 - x}{2022} \in N \Rightarrow$
$(1012 \cdot 2023 - x) \vdots 2022 \Rightarrow 1012 \cdot 2023 - x = 2022n, \ n \in Z$

$x = 1012 \cdot 2023 - 2022n$

$$\begin{array}{r} \times\, 2023 \\ 1012 \\ \hline 4046 \\ 2023 \\ 2023 \\ \hline 2047276 \end{array}$$

$\frac{2047276}{2022} = 1012 + \frac{1012}{2022}$

При $n=1012$:

$x = 1012 \cdot 2023 - 1012 \cdot 2022 = 1012$ $\varnothing$ (т.к. $x=\varepsilon$)

При $n=1011$:

$x = 2047276 - 2044242 = 3034$ $\varnothing$ $>2023$ $n \le 1011$: $\varnothing$ (т.к. $x > 2023$)

При $n=1013$:

$x = 1012 - 2023 = -1011$. $\varnothing$ $<0$ $n \ge 1013$: $\varnothing$ (т.к. $x < \cancel{2023}\,0$)

Ответ: нет, не может. „Кандидатом" на данную роль могло стать число 1012, однако при его стирании среднее арифметическое оказалось равным 1012 (т.е. вышедшему числу). В остальных случаях при целом $\varepsilon$ (среднем арифметическом) число $x$ должно или быть больше 2023, или меньше 0.