Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

Математика
предмет

ШИФР 108М10

58

№1

В задаче нам дано, что число $\overline{abac}$ - чётное, а сумма цифр $\overline{daad}$ кратна 7. Также дан пример:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} abac \\ caba \end{array} \\ \hline daad \end{array}$$

Начнём с суммы цифр $\overline{daad}$. Сумму можно записать так: $2d+2a$. Также мы знаем, что $2d+2a$ кратно 7. Следовательно, $(2d+2a) \vdots 7$.

Число $\overline{abac}$ - чётное, т.е. c - чётное.
Отсюда следует, что a и d - совпадают по чётности, так как $\underset{ч}{c}+\underset{?}{a}=\underset{?}{d}$ (если прибавить к чётному числу чётное, то и ответ будет чётным, если прибавить к чётному числу нечётное, то ответ будет нечётным).

Также, стоит отметить, что $a+b=a$, а значит $b=0$

Вернёмся к сумме цифр $2d+2a$. Если оно кратно семи, то справедливо равенство: ~~[illegible]~~

$2(d+a)=x \mid \vdots 7$. т.к. $2(d+a) \vdots 2$, то и $x \vdots 2 \Rightarrow$

Следовательно $x \vdots 14$.

Значит $2(d+a)=x \,|\, \vdots 14$, $(d+a) \,|\, \vdots 7$, значит $d+a=7k$.

d и a совпадают по чётности, значит $(d+a) \vdots 14$,

Отсюда $d+a=14$ (т.к. $7\cdot 2=14$, а $d+a$ – это цифры $(0-9)$, сумма которых не может быть больше 18)

$14=9+5,\ 8+6,\ 7+7,\ 6+8,\ 5+9$, но вспомним что

$d \geqslant a$, т.к $a+c=d$. Поэтому нам подойдет $d=9,8,7$ $a=5,6,7$ (соответственно)

Данный пример имеет несколько вариантов, приведу один из них, (где $c=d-a$, а значит $9-5=4$)

$$\begin{array}{r} 5054 \\ +4505 \\ \hline 9559 \end{array}$$

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

Математика
предмет

ШИФР 108М10

15

№2

Если 102-й день – это 2-ой день с косой, то следовательно 100-тый день – был 2-ой из двух дней с распущенными волосами. => Значит мы $100 : (3+2) = 20$ повторений

$3+2$ – это 3 дня с косой, и 2 дня с распущенными

Отсюда можно выявить закономерность: если 100-ый день – это второй день с распущенными волосами, то перед ним шла такая последовательность: коса, коса, коса, распущ., распущ.

100-тый день.

Пусть x – это коса, тогда y – это распущенные волосы

Значит закономерность xxxyy.

Значит в день №1 была коса, в день №58 = $= 58 : 5 = 11$ (повт.) $+ 3$, т.е. $\overset{1}{x}\overset{2}{x}\overset{3}{x}\overset{4}{y}\overset{5}{y}$

(третий день с косой)

День недели в день №1 был вторник, так как

$102 : 7 = 14$ недель $+ 4$ ост. 102-й день – пятница,

значит $5+4=9$, но $9>7$, поэтому $9-7=2$ (вторник)

В день №58 = $58 : 7 = 8$ недель $+ 2$ дня, а так как №1 – вторник,

лист 2 то №58 – это $2+2=4$ (четверг.)

Ответ: день №1 – коса и вторник
день №58 – коса и четверг.

15

№3

1) $!100$ – это $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$. Данное произведение насчитывает 11 десяток ($100 : 10 = 10 (+1)$ (т.к. $100 = 10 \cdot 10$)), из них 24 пятёрки,

т.к. $100 : 5 = 20$ ($25 = 5 \cdot 5$, ~~их в 100~~)
а 25 в $100 = 100 : 25 = 4 \Rightarrow 20 + 4 = 24$п.)

и ещё из них 65 двоек, т.к. ($100 : 2 = 50 (+1+2+3+4+5)$) =
т.к. $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$ и т.д.)
$= 50 + 15 = 65$ двоек.

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 11 \\ \hline 13 \end{array}$$ пятёрок (не кратных 10)

$$\begin{array}{r} 65 \\ -\ 11 \\ \hline 54 \end{array}$$ двойки (не кратные 10)

13п и 54д (т.к. $5 \cdot 2$, то $\begin{array}{r} 54 \\ -\ 13 \\ \hline 41 \end{array}$ двойка

и (остается)

$= \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \ldots}_{13 \text{ раз}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{13 \text{ раз}} =$

$=$ 13 нулей из произведение 5 и 2.

получается в $!100$ $11 + 13 = 24$ нуля.

Ответ: 24 нуля

2) По правилам математики, произведение чётного и нечётного равняется чётному, и произведение чётного и чётного равняется чётному, то последняя цифра зависит от (двоек.) 2^x их в $!100 - 65$, но, т.к. все числа, кратные 5-ти убрали, то остаётся 54 двойки ($\begin{array}{r} 65 \\ -\ 11 \\ \hline 54 \end{array}$) по доказанному в прошлом пункте. Рассмотрим закономерность двоек.
$2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $2^5 = 32$ → отсюда можно сделать вывод, что $\Rightarrow$

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

математика
предмет

ШИФР 108м10

№3

2) Можно сделать вывод, что последняя цифра у двоек повторяется каждые 4-ре раза. Поэтому 2, 4, 8, 6 – это закономерность при умножении двоек. Их 54, значит последней цифры,

$54 : 4 = 13 \cdot 4 + 2$, т.е. последняя цифра $= 2^2 = 4$.

~~54 : 4 = 13~~

Ответ: 4

10

№4

$18^2 = 324$ $\quad 324^{2024}$ = будет более 202400 цифр в числе, а в

$2024^2 = 4096576$ $\quad 4096576^{18}$ = будет более 18000000 цифр в числе, поэтому

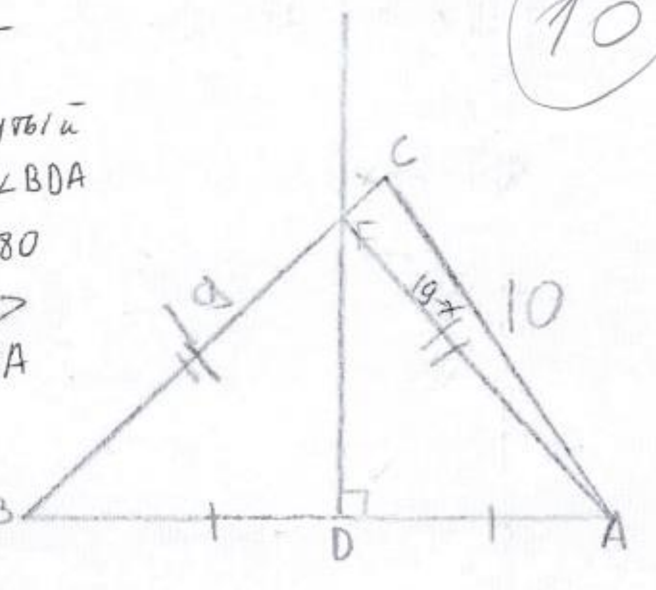
Ответ: $2024^{2^{18}} > 18^{2^{2024}}$

10

№5

Дано:
$\triangle ABC$, $BC = 19$ см
$AD = BD$
$AC = 10$ см
$\angle ADF = 90°$
Найти периметр $\triangle AFC$

Решение
$\angle BDA$ – развёрнутый
$\angle BDF + \angle FDA = \angle BDA$
$90 + \angle BDF = 180$
$\angle BDF = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BDF = \angle FDA$



лист 3

Решение:

Рассмотрим $\triangle BFD$ и $\triangle FDA$

1) $BD = DA$.
2) FD – общая сторона
3) $\angle BDF = \angle FDA$ (по доказанному)

Значит $\triangle BFD = \triangle FDA$ по 2-м сторонам и углу м/у ними. Из равенства $\triangle$-ов следует равенство соот. элементов.

Следовательно $\angle BFD = \angle DFA$.

Рассмотрим $\triangle BFA$

1) FD – перпендикуляр, $BD = AD$, $\angle BFD = \angle DFA$; значит $\triangle BFA$ – равнобедренный

Сторона $BF = BC - FC$

Пусть $FC = x$, тогда

$BF = BC - x$

$BF = FA$ (т.к. $\triangle BFA$ – равнобедренный)

$FA = BC - x$

$P_{\triangle AFC} = AF + FC + AC$

$P_{\triangle AFC} = BC - x + x + AC$

$P_{\triangle AFC} = 19 + 10 = 29$ см

Ответ: 29 см.