

1/2/3/4/5/6
10/10/0/15/20/15

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2024/2025 уч. год

Σ 70

математика
предмет

ШИФР 611111

Задача 1

10

$$\cos^{2024} x \cdot \sin^{2025} x = \frac{\pi^2}{8 \cdot 256^{253}}$$

$$256^{253} = (2^8)^{253} = 2^{2024}$$

$$\begin{aligned} \cos^{2024} x \cdot \sin^{2025} x &= (\cos x \cdot \sin x)^{2024} \cdot \sin x \\ &= \left(\frac{2 \cos x \cdot \sin x}{2} \right)^{2024} \cdot \sin x = \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^{2024} \cdot \sin x \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^{2024} 2x}{2^{2024}} \cdot \sin x = \frac{\pi^2}{2^{2027}}$$

$$\sin^{2024} 2x \cdot \sin x = \frac{\pi^2}{2^3}$$

~~$\sin 2x \in [-1; 1]$~~ $\sin^{2024} 2x \in [0; 1]$

~~$|\sin^{2024} 2x| \leq 1$~~ $(\sin x) \leq 1$

Значит $|\sin^{2024} 2x \cdot \sin x| \leq 1$

$\frac{\pi^2}{8} > \frac{3^2}{8}$ так как $\pi = 3,14... > 3$

$\frac{3^2}{8} = \frac{9}{8} > 1$ $\sin^{2024} 2x \cdot \sin x > 1$ — невозможное соотношение
поэтому

Ответ: нет корней.

математика

предмет

ШИФР 666666

(15)

Задание 6: Решение: пусть наше число n -представило

как $\overline{abc...x}$ и если $abc... = k$ то

$n = 10k + x$ когда зачеркнем последнюю цифру x -
станем k , а когда прибавим, то $k \cdot 6 + x$

и если $k \cdot 6 + x = 0$ то $k = 6x$

и $n = 10k + x = 60x + x = 61x \div 61$ выполняется.

Теперь, докажем по мат индукции, что если
число после n_i в некоторый момент делится на 61,
то и n_0 тоже

$$n_i = 10k + x \quad \text{и} \quad n_{i+1} = k \cdot 6 + x$$

$$k \cdot 6 + x \div 61 \quad \text{то} \quad k = 6x + 61n$$

$$\begin{aligned} \text{тогда} \quad n_0 &= 10k + x = 10(6x + 61n) + x \\ &= 61x + 610n \div 61 - \text{верно, значит и в начале} \\ &\quad \text{получено делится на 61} \end{aligned}$$

математика

ШИФР 611111

предмет

Задача 2: Посмотрим число 101 (10)
101 не делится на 2, 3, 5, 7, 11 – все числа (и 11) до $\sqrt{101} \approx 10,1$.
Значит 101 – простое, так как достаточно проверить
все числа меньше $\sqrt{101}$. Посмотрим сейчас
как 101 встречается в нашей таблице

~~101~~ меньше – не встречается

1010

11101

1212

1313

1414

1515

1616

1717

1818

1919

2020

2121 и далее – не встречаются

Значит у нас будет 11
чисел, включая 101
и при этом в первом
столбце. Так как 11 –
простое, при разложении
у нас где-то 101 будет
однажды, и так как
101 – простое, и ~~мы~~ знаем
попутно у других чисел
перемножив их показатели,

то одно произведение никак не может достигать
столбца вхождение 101 другого, а значит они
не могут быть равны.

Ответ: не могут.

математика.

предмет

ШИФР 611111

Задача 5°

Решение:
Проводим одну касательную
через A

и пусть

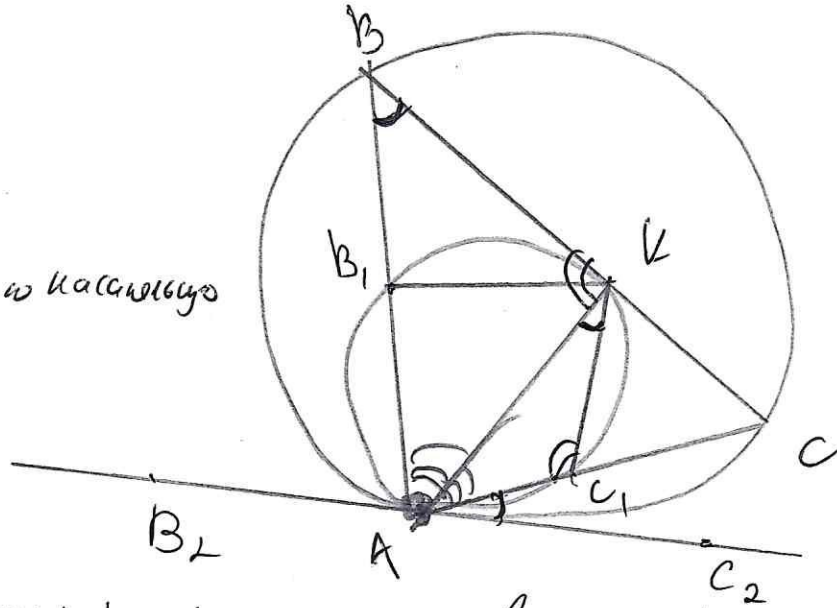
AB и AC пересекают малую окр. в точках B₁ и C₁

Отметим на нашей одной касательной две точки:
C₂ со стороны вершины C и B₂ с другой

по свойству касательной $\angle CAC_2 = \angle CA = \angle ABC$

также $\angle C_1AC_2 = \angle AC_1 = \angle AKC_1$ и $\angle BKA = \angle AK = \angle AC_1K$

значит, что $\triangle BKA \sim \triangle AKC_1$, так как два угла равны,
и $\angle BAK = \angle KAC_1$ так как AK – биссектриса



20

Математика

предмет

ШИФР ВРЕМЕНИ

Задача 4

15

$$x^{2025} \sqrt{x^{2026} + 2025} + (x+2025)^{2025} \sqrt{(x+2025)^{2026} + 2025} + 2x+2025$$

$x=a$ $x+2025=b$

$$a^{2025} \sqrt{a^{2026} + 2025} + a + b^{2025} \sqrt{b^{2026} + 2025} + b = 0$$

$$f(x) = x^{2025} \sqrt{x^{2026} + 2025} + x = x(x^{2024} \sqrt{x^{2026} + 2025} + 1)$$

Заметим, что функция всегда убывает, так как если $x_1 > x_2$, то и $x_2 \geq 0$, то

$$x_1^{2024} \sqrt{x_1^{2026} + 2025} + 1 > x_2^{2024} \sqrt{x_2^{2026} + 2025} + 1$$

если $x_1 > x_2$ и $x_1 \geq 0$ $x_2 < 0$ то $f(x_1) > 0 > f(x_2)$

и если оба < 0 , то $0 \geq x_1 > x_2$

$$x_1^{2024} \sqrt{x_1^{2026} + 2025} + 1 > x_2^{2024} \sqrt{x_2^{2026} + 2025} + 1$$

$$x_1 = -a \quad x_2 = -b$$

$$b > a$$

$$f(x_1) = -a(a^{2024} \sqrt{a^{2026} + 2025} + 1) > -b(b^{2024} \sqrt{b^{2026} + 2025} + 1)$$

наблюдается противоречие, когда $x_1 > x_2 \geq 0$.

Значит она всегда равна, и $f(x) = f(y)$ либо если $x=y$ тогда

$$a(a^{2024} \sqrt{a^{2026} + 2025} + 1) = -b(b^{2024} \sqrt{b^{2026} + 2025} + 1)$$

$$f(a) = f(-b) \quad a = -b \quad x = -x - 2025$$

$$2x = -2025 \quad x = -1012,5 \quad \text{Ответ: } -1012,5$$