Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ 2025/2026 учебный год

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА

КЛАСС 11

Вариант 2

Задание 1 (25 баллов)
На плоскости изображена ограниченная фигура F, площадь которой равна $1\frac{1}{2026}$. Внутри нее расположены 2026 фигур $F_1, F_2 \dots F_{2026}$, сумма площадей которых больше 2026. Верно ли утверждение, что существует точка, которая одновременно принадлежит всем фигурам F_i; $i = 1; 2; \dots; 2026$? Ответ обосновать.

Решение:
Площади фигур $F_1; F_2; \dots; F_{2026}$ обозначим S_1; S_2; …; S_{2026}. Фигуры, дополняющие F_i до F, обозначим $\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots \bar{F}_{2026}$, а их площади $\bar{S}_1; \bar{S}_2 \dots \bar{S}_{2026}$. Так как $S_i + \bar{S}_i = 1\frac{1}{2026}$, то

$$\sum S_i + \sum \bar{S}_i = 2027 \to \sum S_i = 2027 - \sum \bar{S}_i.$$

По условию

$$\sum S_i > 2026 \to 2027 - \sum \bar{S}_{i_i} > 2026 \to \sum \bar{S}_i < 1,$$

следовательно, дополняющие фигуры $\bar{F}_i$не могут покрывать всю фигуру F, то есть существует точка , которая не принадлежит всем $\bar{F}_i$ одновременно , но тогда эта точка входит во все фигуры F_i, то есть является их общей точкой.

Ответ: верно.

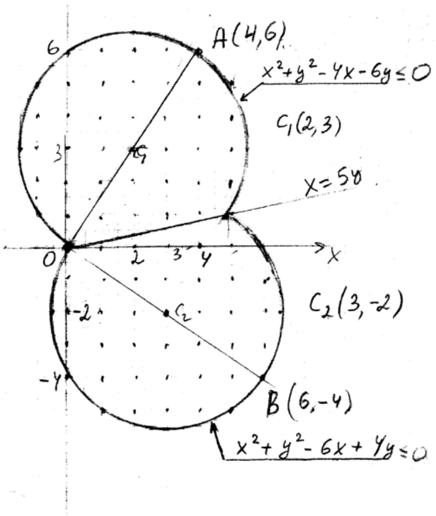
Задание 2 (25 баллов)

Решите неравенство: $x^2 + y^2 - 5x - y \le |5y - x|$. Сколько точек с целыми координатами являются решением этого неравенства? Найдите ту (те) из них, которые наиболее удалены от начала координат?

Решение:

1) $\begin{cases} 5y - x \ge 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y \le 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 5y - x \ge 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \le 13 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5y - x < 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y \le 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 5y - x < 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 \le 13 \end{cases}$



Построим область, определяемую данными системами неравенств.

Точки, диаметрально удаленные от начала координат: А (4;6) и В (6; -4).

Всего целых решений 80.

Задание 3 (20 баллов)

Часы со стрелками показывают 20 часов 25 минут 26 секунд. Через сколько минут впервые часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?

Решение:

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает $\left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right)$ часов, минутная стрелка показывает $\left(25 + \frac{26}{60}\right)$ минут.

Часовая стрелка имеет угловую скорость $30\,{}^{\circ}/_{\text{час}}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол

$$\alpha = \left(8 + \frac{25}{60} + \frac{26}{3600}\right) \cdot 30\,{}^{\circ}/_{\text{час}} = \left(240 + \frac{25}{2} + \frac{13}{60}\right)^{\circ} = 252\frac{43}{60}{}^{\circ}.$$

Минутная стрелка имеет угловую скорость $6^{\circ}/\text{мин}$, поэтому от момента времени 08ч 00м 00с она повернется на угол

$$\beta = \left(25 + \frac{26}{60}\right) \cdot 6\,{}^{\circ}/_{\text{мин}} = \left(150 + \frac{26}{10}\right)^{\circ} = 152\frac{3}{5}{}^{\circ}.$$

Найдем угол между часовой и минутной стрелками

$$\alpha - \beta = 252\frac{43}{60} - 152\frac{3}{5} = 100\frac{7}{60}{}^{\circ}.$$

Пусть минутная стрелка образует с часовой прямой угол через t минут. За это время часовая стрелка (угловая скорость $30\,{}^{\circ}/_{\text{час}} = \frac{1}{2}{}^{\circ}/_{\text{мин}}$) повернется на угол $\frac{1}{2}t$, а минутная стрелка (угловая скорость $6^{\circ}/\text{мин}$) - на $6t$; следовательно,

$$6t = \alpha - \beta + \frac{1}{2}t - 90, \qquad \frac{11}{2}t = 100\frac{7}{60} - 90, \qquad \frac{11}{2}t = \frac{607}{60}{}^{\circ}$$

$$t = \frac{607}{330} = 1\frac{277}{330} \text{ мин.}$$

Ответ: $1\frac{277}{330}$ мин.

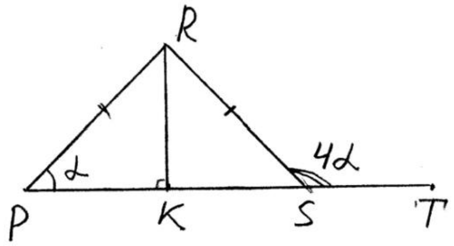
Задание 4 (20 баллов)
На календаре 12 июля 2025 года, суббота. Какова была дата и день недели 400 суток назад. Отсчет начинается с 11 июля 2025 года. Ответ обоснуйте.

Решение:
12 июля 2025 года, суббота. 2024 год високосный, но период 400 дней назад не затрагивает дополнительный день 29 февраля. Поэтому 365–й день назад будет 12 июля 2024 года. Осталось 35 дней. В июне 30 дней, поэтому 30-й день – это 12 июня. Еще пять дней назад дают 7 июня 2024 года.
Поэтому 7 июня 2024 года будет 400-й день назад от 12 июля 2025 года.
Посчитаем, какой это будет день недели. Так как $400 = 57 \cdot 7 + 1$, то день недели будет суббота -1 = пятница.

Ответ: 7 июня 2024 года, пятница.

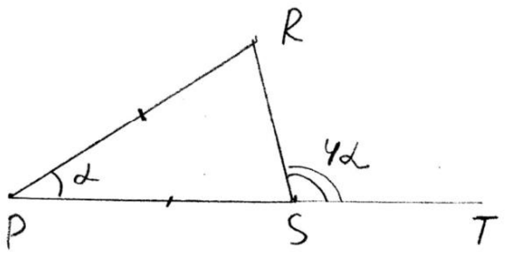
Задание 5 (10 баллов)
На прямой в указанном порядке расположены точки P, S, T. Точка R находится вне прямой, при этом угол RPS в 4 раза меньше угла RST. Найдите площадь треугольника PRS, если он равнобедренный , $PS = 1$.

Решение
<u>1 случай</u>



Так как $\angle RST = 4\alpha$, то $\angle PRS = 3\alpha$ по свойству внешнего угла и т.к. ΔPRS – равнобедренный , то равные стороны могут быть PR и RS, т.е
$PR = RS = 1$, следовательно, $\angle RPS = \angle RSP = \alpha$.
С другой стороны, $\angle RSP = \pi - 4\alpha$(смежный с углом RST), поэтому $\alpha = \pi - 4\alpha,$ откуда $\alpha = \frac{\pi}{5}$.
RK —высота $RK = PK \cdot tg\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}PS \cdot tg\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}tg\frac{\pi}{5}$,
$$S_{prs} = \frac{1}{2}PS \cdot RK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}tg\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}tg\frac{\pi}{5}$$
Ответ: $\frac{1}{4}tg\frac{\pi}{5}$**.**

<u>2 случай</u>



Так как $\angle RST = 4\alpha$, то $\angle PSR = 3\alpha$ по свойству внешнего угла и т.к. ΔPRS – равнобедренный , то равные стороны могут быть PR и PS, т.е
$PR = RS$, следовательно, $\angle PRS = \angle PSR = 3\alpha$.
С другой стороны, $\angle RSP = \pi - 4\alpha$(

смежный с углом RST), поэтому $3\alpha = \pi - 4\alpha,$ откуда $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

$$S_{prs} = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot PS \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2} sin\frac{\pi}{7}$$

Ответ: $\frac{1}{2} sin\frac{\pi}{7}$**.**