

1	2	3	4	5
20	10	20	15	15

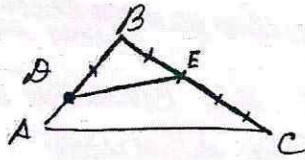
 $\Sigma 80$

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2024/2025 уч. год

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 57-9-М-05



№5.

Найдём DE по теореме косинусов.

$$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2 \cdot BD \cdot BE \cdot \cos B.$$

1) $D \in AB$; $BD = 2 \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{1}{2} BD$

$$AB = BD + AD.$$

$$AB = BD + \frac{1}{2} BD$$

$$AB = 1,5 BD.$$

$$BD = \frac{2}{3} AB.$$

$$BD = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

2) $E \in BC$; $3 \cdot BE = 2 \cdot CE \Rightarrow \cancel{BE = \frac{2}{3} CE} CE = 1,5 BE$

$$BC = BE + CE$$

$$BC = BE + 1,5 BE$$

$$BC = 2,5 BE$$

$$BE = \frac{BC}{2,5}$$

$$BE = \frac{5}{2,5} = 2.$$

3) Найдём $\cos B$ по теореме косинусов для $\triangle ABC$.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B.$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}.$$

$$\cos B = \frac{3^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9 + 25 - 36}{30} = \frac{34 - 36}{30} = \frac{-2}{30} = -\frac{1}{15}.$$

4) Найдём DE^2 .

$$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2 \cdot BD \cdot BE \cdot \cos B.$$

$$DE^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) = 4 + 4 + \frac{8}{15} = 8\frac{8}{15} = \frac{128}{15}.$$

$$DE = \sqrt{\frac{128}{15}} = \sqrt{\frac{2^6 \cdot 2 \cdot 15}{15 \cdot 15}} = \frac{8}{15} \sqrt{30}.$$

75

Предположим:

- 1) Собрали Сергея; он внес не самый маленький вклад.
Иван — внес самый большой (не самый маленький).
Михаил и Пётр ~~тоже~~ сказали, что внесли не самые
малые вклады.

- получаем противоречие, кто-то всё равно должен внести ^{самый малый вклад}.
2) Собрали Пётр. Тогда он должен внести или самый боль-
шой, или самый маленький вклад. Но самый большой
внёс Иван, а самый маленький — Сергей.

Противоречие.

- 3) Собрали Михаил. Тогда он должен внести самый малень-
кий вклад. Но самый маленький вклад внёс Сергей.

Снова противоречие.

- 4) Собрали Иван. Противоречий не получаем; самый
маленький вклад у Сергея, самый большой — у Михаила.
(Иван собрал, у него не самый большой, Пётр сказал, что у него не самый
большой, а у Сергея самый маленький).

Представим в виде таблицы:

	1	2	3	4
ИВАН	X			X
МИХ.	X	X	X	X
ПЁТР	X			X
СЕР.	X	X	X	X

Ответ: Иван — Илья.

№2.

10

Пусть $(x-2); (x-1); x; (x+1); (x+2)$ — натуральные числа.
Найдём сумму квадратов этих чисел.

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 =$$

$$= 5x^2 + 10$$

Из выражения $5x^2 + 10$ не выведём
 $\sqrt{5x^2 + 10} = \sqrt{5(x^2 + 2)}$ — не является натуральным числом.

Б.И. 7

МАТЕМАТИКА

предмет

ШИФР 57-9-М-05

№ 3.

20

~~Пусть число, которое~~

Пусть начальное четырёхзначное число равно $10a+b$
а – первые цифры числа, в последнее.

В результате операции получим: $a+3b$.

Пусть число полученное в результате операции $a+3b=10c+d$.

Тогда после второй операции получим: $c+3d=29$.

Теперь докажем, что $10a+b$ делится на 29.

$$1) c+3d=29.$$

$$c = 29 - 3d.$$

$$2) 10c+d = 10(29-3d)+d = 290-30d+d = 290-29d = 29(10-d)$$

$$3) a+3b=10c+d=29(10-d)$$

$$a+3b=29(10-d)$$

$$a=29(10-d)-3b$$

$$4) 10a+b = 10(29(10-d)-3b)+b = 290(10-d)-30b+b = 290(10-d)-29b = 29(10(10-d)-b) = 29(100-10d-b).$$

Таким образом $10a+b$ (начальное четырёхзначное число) кратно 29.

№ 4.

15

Произведение всех чисел или столбца будет равно ~~либо 1, либо -1.~~

Рассмотрим таблицы с меньшим кол-вом клеток, но такие, чтобы сторона была нечётным числом.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{не подходит}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \text{не подходит}$$

~~№4~~
 №4 (продолжение)

1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1
1	1	1	1
2			

не подходит

1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
-2			

не подходит

-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1
1	1	-1	-1
2			

не подходит

И в одном из полученных таблиц не получилось число 0. Самый близкий к этому результат 2 и -2.

Значит, при размере таблицы 2025×2025 сумма произведений не будет равна 0.