

1	2	3	4	5	6
10	15	5	10	0	15

Σ 55

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2024/2025 уч. год

математика

предмет

ШИФР 94-11-и-1

$$1. \cos^{2024} x \cdot \sin^{2025} x = \frac{\pi^2}{8 \cdot 256^{253}}$$

$$\sin x \cdot (\cos x \cdot \sin x)^{2024} = \frac{\pi^2}{8 \cdot 2^{2024}}$$

$$\sin x \cdot \frac{\sin^{2024} 2x}{2^{2024}} = \frac{\pi^2}{8 \cdot 2^{2024}}$$

$$\sin x \cdot \sin^{2024} 2x = \frac{\pi^2}{8}$$

т.к. $\sin x \cdot \sin^{2024} 2x \leq 1$, а $\frac{\pi^2}{8} > \frac{9}{8} > 1$, то решений нет

Ответ: решений нет

Пусть

2. Предположим, что это так. Пусть A – произведение I группы, B – произ-е II группы. Пусть $A = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots 997^k$ и $B = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots 997^n$, где k и $n \in \mathbb{N}$. Если $A=B$, то $k=n$, что невозможно, так как единственное число, содержащее простую множитель 997, – это $1994 = 2 \cdot 997$. Противоречие.

Ответ: нет

$$4. x^{2025} \cdot \sqrt{x^{2026} + 2025} + (x+2025)^{2025} \cdot \sqrt{(x+2025)^{2026} + 2025 + 2x + 2025} = 0$$

(10)

нет гоу-ла

Заметим, что, перенеся $2x$ в правую часть равенства, слева получим монотонно возрастающую функцию (для все больших значений x функ-я будет все больше), а справа – убывающую. Значит, при пересечении графиков данных функций может быть макс. в 1-й точке. ~~Важная м~~

Абсцисса данной точки легко определяется: $x = -1012,5$
 Ответ: $x = -1012,5$

6. Пред: Пусть последнее ненулевое число, полученное с помощью данного вида алгоритма, равно $\overline{ab} = 10a + b$.
 Тогда $a - 6b = 0 \Leftrightarrow a = 6b \Leftrightarrow \overline{ab} = 61b \div 61$. Докажем методом мат. индукции, что любое число, которое $\div 61$, на любом шаге данной операции будет $\div 61$.

База: известна.

Пусть на некотором шаге получилось число $\overline{xy} = 10x + y$, а на следующей операции получилось число вида $61k$.
 Тогда $61k = x - 6y \Leftrightarrow x = 61k + 6y \Leftrightarrow \overline{xy} = 610k + 61y \div 61$.

Ответ: э. м. д.

$3, 26^{100} + 27^{100} + 28^{100} + \dots + 2726^{100}$ Найти последние 3 цифры

Решение:

Разобьем числа в сумме на пары $(1025-k)^{100} + (1026+k)^{100}$, где $k \in \mathbb{Z}, k \in [0; 999]$. Тогда:

$$\begin{aligned} 26^{100} + 27^{100} + \dots + 2726^{100} &= \sum_{k=0}^{999} [(1025-k)^{100} + (1026+k)^{100}] = \\ &= 1000(25^{100} + 26^{100}) + 2 \cdot \left(\frac{1000 \cdot 999}{2} \right) + \sum_{n=1}^{1000} \left[(-1)^n C_{100}^n 25^{100-n} \cdot \frac{1000 \cdot 999}{2} \right] + \\ &+ \sum_{m=1}^{999} \left[C_{100}^m 26^{100-m} \cdot \frac{1000 \cdot 999}{2} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{999} \left[C_{100}^k = \sum_{m=0}^{100} \left[C_{100}^m (26^{100-m} + (-1)^m \cdot 25^{100-m}) \cdot \sum_{k=0}^{999} \binom{m}{k} \right] \right] \end{aligned}$$

Очевидно, что суммарная сумма $\div 1000$, значит, число оканчивается 3-я нулями. Ответ: 000 Кес