

Математика 10 класс
предмет

ШИФР 10611438

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = d \end{cases} \Rightarrow x + y + x^2 + y^2 = d$. Пусть рассмотрим случаи, где $x = y$.
 $2x^2 + 2x = d \Rightarrow 2x^2 + 2x - d = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8d}}{4}$

Заметим, что при $d > -0,5$, всегда есть 2 варианта ответа, где $x = y$. Докажем, что нет вариантов, где $d < -0,5$.
 $d = (x^2 + x) + (y^2 + y)$

Посредством производной $\frac{d}{dx} x^2 + x = 2x + 1$, минимум этой функции находится в $x = -0,5$, где оно равно $-0,25$. Следовательно, d не может превышать $-0,5$. Так как оно равно $-0,5$ лишь если $x = y = -0,5$. $z = 0,5$.
 Ответ: $d = -0,5$.

4. Пусть $N + a = x^2$, $N - b = y^2$. Заметим, что $x^2 - y^2 = a + b = 2021$.

$(x - y)(x + y) = 2021$. Это возможно лишь при $\begin{cases} x = 46 \\ y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1011 \\ y = 1010 \end{cases}$ так как множители 2021 - 43, 47 и 1 * 2021. N может быть любым числом между x^2 и y^2 , не включая их самих. Таких чисел 2020 их каждую пару ($x^2 - y^2 = 2021$). $N = 2020 \cdot 2 = 4040$.

Бланк № 2

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2020/2021 уч. год

Математика 10 класс
предмет

ШИФР 10611438

3. Пусть другие стороны - b и c , и их углы, им противо-
положные - x и y .

$$\frac{xd}{\sin d} = \frac{b}{\sin x} = \frac{c}{\sin y} \quad b = \frac{d \sin x}{\sin d}$$

$$b + c = \frac{d}{\sin d} (\sin x + \sin y) = \frac{d}{\sin d} (2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}) \quad c = \frac{d \sin y}{\sin d}$$

П.к. $0 < x + y < 180^\circ$, $\sin(\frac{x+y}{2}) > 0$. Следовательно, чтобы макси-
мально увеличить $b+c$, надо максимизировать $\cos(\frac{x-y}{2})$, что макси-
мально при $x=y$. Следовательно, получается равнобе-
денный треугольник с основанием d .

т.к. сторона b тем больше, и высота - медиана $\times \frac{d}{2}$
т.к. $\frac{d \sin \frac{d}{2}}{2 \sin \frac{d}{2}}$. Следовательно, периметр равен $d + \frac{d}{\sin \frac{d}{2}}$.