1	2	3	4	5
20	20	0	10	10

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр» для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

$\Sigma 60$

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 55-9-М-2

20

не все решения

№1.

$2023^x+2024^x=5p$

Решение.

Т.к. $2023^x+2024^x=5p \Rightarrow (2023^x+2024^x) \vdots 5$. Число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или на 5 (по признаку делимости на 5). 0 или 5 на конце можно получить следующими способами:

...0+...0=...0;
...1+...9=...0;
...2+...8=...0;
...3+...7=...0;
...4+...6=...0;
...5+...5=...0;
...6+...4=...0;
...7+...3=...0;
...8+...2=...0;
...9+...1=...0;

...0+...5=...5;
...1+...4=...5;
...2+...3=...5;
...3+...2=...5;
...4+...1=...5;
...5+...0=...5;
...6+...9=...5;
...7+...8=...5;
...8+...7=...5;

...9+...6=...5;

При возведении 2023 в степень на конце могут получиться следующие ~~цифры~~ числа: $3^1=3$; $3^2=9$; $3^3=...7$; $3^4=...1$; $3^5=...3$ и тд. => при возведении 2023 в какую-то степень на конце могут получится 3, 9, 7, 1.

При возведении 2024 в степень на конце могут получиться следующие числа: $4^1=...4$; $4^2=...6$; $4^3=...4$; $4^4=...6$ => при возведении 2024 в какую-то степень на конце могут получиться только 4 и 6.

Т.к. x - одно число, то числа 2023 и 2024 будут возведены в одну степень. ~~=>~~ Посмотрим, какие числа могут получиться на конце при сложении 2023 и 2024, возведённых в степень:

$2023^1+2024^1=...7 \not\vdots 5$

$2023^2+2024^2=...5 \vdots 5$

$2023^3+2024^3=...1 \not\vdots 5$

$2023^4+2024^4=...7 \not\vdots 5$

Т.к. числа на конце повторяются => могут получиться 7, 5, 1. Число 5 нам подходит, и оно получается при сложении 2023 и 2024, возведённых в квадрат => $2023^2+2024^2=4093529+4096576=8190105$;

$5p=8190105 \mid :5$

$p=1638021$

$2023^2+2024^2=5\cdot 1638021 \Rightarrow x=2,\ p=1638021$

Ответ. $x=2$; $p=1638021$

Шифр 55-9-М-2

№2.

Т.к. 18 чисел ⋮ 11 и 13 чисел ⋮ 23, а всего 23 числа => есть числа, которые делятся ~~на~~ и на 11, и на 23. ~~найдём, можно~~

18+13 − 23 = 31 − 23 = 8, Всего 8 чисел, которые делятся и на 11, и на 13. Наименьшее число, которое делится на 11 и 13 − это 253 (11·13 = 253). Т.к. все числа различны, значит, найдём ~~это~~ последующие числа, которые делятся на 11 и 23.

1) 11·23 = 253
2) 253·2 = 506
3) 253·3 = 759
4) 253·4 = 1012
5) 253·5 = 1265
6) 253·6 = 1518
7) 253·7 = 1771
8) 253·8 = 2024

Это наименьшие 8 чисел, которые делятся на 11 и 23 => числа могут быть больше.

20

~~253, 506, 7~~ 2024 ≮ 2024 => на доске есть число, которое не меньше 2024

Ответ. есть такое число.

№5.

Т.к. длины сторон должны быть ~~целыми~~ натуральными числами => $a^2 \pm b^2 + c^2$; $\sqrt{a}$ − натуральное число. Пары чисел, суммы квадратов которых дают квадрат натурального числа:

3 и 4; $3^2+4^2 = 9+16 = 25$; $\sqrt{25} = 5$

6 и 8; $6^2+8^2 = 36+64 = 100$; $\sqrt{100} = 10$

9 и 12; $9^2+12^2 = 81+144 = 225$; $\sqrt{225} = 15$

5 и 13; $5^2+13^2 = 25+169 = 196$; $\sqrt{196} = 14$

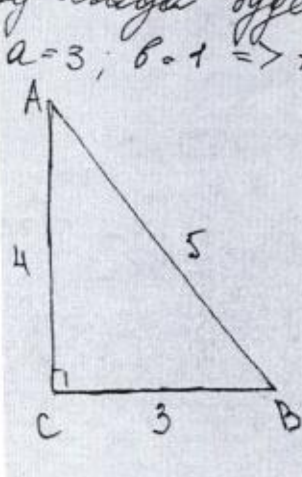
и т.д.

10

5 и 13 нам не подходят, т.к. если a = 5 => b = 13 − 5 = 8; 5+2·8 = 21 ≠ 14

Нам подходят пары чисел одно из которых кратно 3, а другое кратно 4. Это будет египетский треугольник. Возьмем наименьшие a и b, т.к. остальные числа будут кратны им и tg всегда будет одинаковым.

a = 3; b = 1 => ~~AB = a = 3~~; BC = a = 3; AC = a + b = 3 + 1 = 4; AB = a + 2b = 3 + 2·1 = 5



Т.к. ∠B лежит напротив большего катета => ∠B > ∠A; $tg\angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Ответ. $tg\angle B = 1\frac{1}{3}$

Не всегда, Возьмите a = 12 b = 5
a + b = 21, a + 2b = 30
$21^2 + 12^2 = 441 + 144 = 585 \neq 30^2$

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

МАТЕМАТИКА — предмет

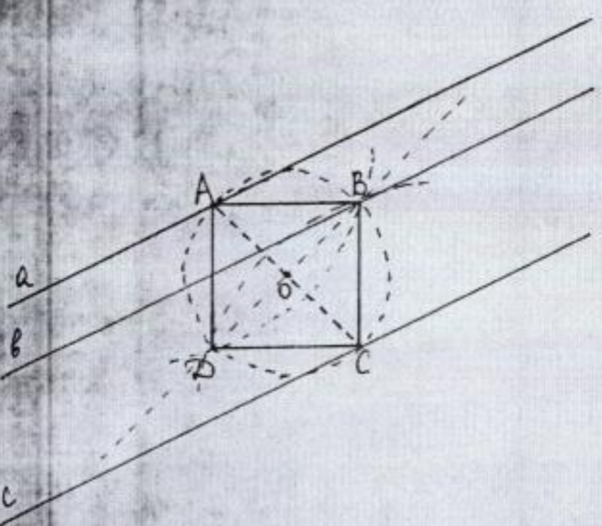
ШИФР 55-9-М-2

10

Не всегда получите квадрат! надо доказать, что это квадрат

№ 4.

Да, можно построить такой квадрат. На двух крайних прямых возьмём две любые точки (на прямых a и c). Соединим эти две точки. У нас получился отрезок AC. Найдём середину отрезка AC с помощью циркуля. Возьмём любой радиус, который визуально больше ~~серед~~ половины отрезка AC. Проведём окружности с центрами в точке A и C. Данные окружности пересекаются в двух точках.



Через эти точки нужно провести прямую, эта прямая будет пересекать отрезок AC в точке O, которая будет являться серединой отрезка AC. AO = OC = r => ~~из точки O~~ Начертим с помощью циркуля окружность с центром в точке O и радиусом, равным AO. Данная окружность будет пересекать прямую b в точке B. Проведём прямую через точки O и B, чтобы она пересекала окружность с центром ~~в точке O в точке D~~ в точке O. Точку пересечения окружности и прямой назовём D. Осталось соединить полученные точки ~~(A, B, C и D)~~ (A с B; B с C; C с D; D с A) и у нас получился квадрат ABCD.

Ответ: да, с помощью циркуля и линейки можно построить квадрат, три вершины которого будут лежать на ~~паралл~~ параллельных прямых.

Таким построением можно получить