МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

ОЛИМПИАДА «Я-БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМУ ЭТАПУ ОЛИМПИАДЫ

2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА ДЛЯ **10** КЛАССА

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к освоению образовательных программ ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на верное и полное решение. Задания направлены на выявление интеллектуального потенциала, аналитических способностей и креативности мышления участников.

Очный этап олимпиады проводится только в письменной форме. Каждый участник олимпиады получает бланк с заданием одного из двух вариантов, содержащий 5 заданий. Задание считается выполненным, если получен верный ответ (ответы) на поставленный вопрос (вопросы). Задания олимпиады предполагают, что вопросов и вариантов ответа может быть несколько. Наибольшая итоговая сумма баллов, которой могут быть оценены ответы на все вопросы олимпиадного **варианта** при условии отсутствия в них ошибок, неправильных, неполных или неточных ответов, равна **100**. При отсутствии полного и верного ответа оцениваются отдельные этапы решения и характер допущенных ошибок, то есть возможен частичный зачёт баллов за неполный или неверный ответ за **задание**. Под неполным понимается ответ, содержащий правильные ответы не на все вопросы или варианты решения **задания**. Подсчёт итоговой оценки за весь **вариант** осуществляется путём суммирования баллов, выставленных за каждое из **заданий**.

На решение задач отборочного этапа Олимпиады отводится 3 часа 30 минут (три часа тридцать минут или 210 минут). Отсчет времени начинается с момента начала выполнения заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА

РАЗДЕЛ 1. Арифметика (теория чисел): структура и свойства натуральных чисел. Алгебра: преобразование алгебраических выражений

Умение решать неопределенные уравнения в классах целых или натуральных чисел. Предполагает знание участником базовых понятий: одночлен, многочлен; подобные одночлены. Умение выполнять операции над многочленами, в частности, раскладывать их на произведение множителей.

РАЗДЕЛ 2. Задачи на совместную работу. Круговое движение

Предполагает знание участником базовых понятий: работа, производительность; угловая скорость движения, угол поворота.

РАЗДЕЛ 3. Планиметрия: расчет элементов треугольников и четырехугольников

Предполагает знание участником важнейших фактов о взаимосвязи сторон и углов треугольников и четырехугольников, включая теоремы синусов и косинусов; уверенное владение признаками равенства и признаками подобия; знание основных фактов о вписанных и описанных окружностях.

РАЗДЕЛ 4. Метод координат

Предполагает знание участником базовых понятий: числовая ось, координата точки на числовой оси; структура прямоугольной системы координат, координаты точки на плоскости. Умение строить графики линейной и квадратичной функции и решать графически системы линейных уравнений»

Примеры заданий:

Задание 1: Решите уравнение: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

Решение

Пусть $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt{x-1}=b$, тогда $2-x=a^3$, $x-1=b^2$,

получим систему $\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1 \end{cases}$, $\begin{cases} b=1-a \\ a^3+(1-a)^2=1 \end{cases}$.

Уравнение $a^3+(1-a)^2=1$ имеет три корня $a=0, a=1, a=-2$.

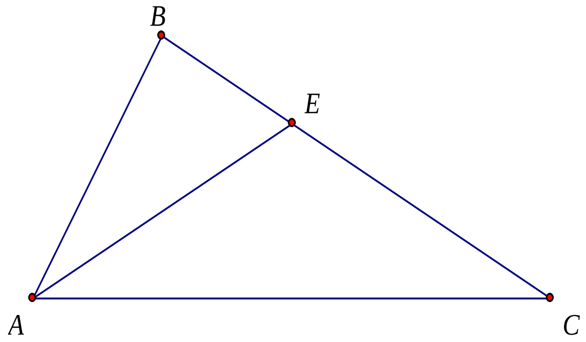
При $a=0$: $2-x=0$, $x=2$,

при $a=1$: $2-x=1$, $x=1$,

при $a=-2$: $2-x=-8$, $x=10$.

Ответ. 1; 2; 10.

Задание 2: В треугольнике *ABC* биссектриса *AE* равна отрезку *EC*. Найдите углы треугольника *ABC*, если известно, что *AC* = 2 *AB*. Найдите отношение площадей треугольников *ABE* и *AEC*.



Пусть $\angle C = \alpha$, так как AE =EC,

то $\angle EAC = \alpha$, а т.к. AE – биссектриса, то $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle B = 180^0 - 3\alpha$.

Из $\Delta\ ABC$ по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$ $\Rightarrow$

$\frac{2AB}{\sin(180^0 - 3\alpha)} = \frac{AB}{\sin\alpha}$. Отсюда: $2\sin\alpha = \sin 3\alpha$, $\sin\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha$,

$\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha$,

$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$. Следовательно, $\angle C = 30^0$, то $\angle A = 60^0$, $\angle B = 90^0$.

Проведем высоту ЕК в Δ AEC . Так как треугольники *ABE, AEK* и *KEC* равны,

То $S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{AEC}$, $\frac{S_{ABE}}{S_{AEC}} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\angle$ A = 60^0, $\angle$ B = 90^0, $\angle$ C = 30^0 ; 0.5.

Задание 3: Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(a-4)x^2 + 6x - 2}{x^3 - x^2 - x - 2} = 0$$

имеет один корень.

<u>Решение</u>

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}(a-4)x^2 + 6x - 2 = 0 \\ x^3 - x^2 - x - 2 \neq 0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(a-4)x^2 + 6x - 2 = 0 \\ (x-2)(x^2 + x + 1) \neq 0\end{cases}$$

При $a = 4$, первое уравнение системы будет линейным: $6x - 2 = 0, x = \frac{1}{3}$.

При $a \neq 4$, первое уравнение системы будет квадратным и его дискриминант

$$D = 36 + 8(a-4) = 0 \quad \text{при} \quad a = -\frac{1}{2};$$

$$\left(-\frac{1}{2}-4\right)x^2+6x-2=0, \qquad (3x-2)^2=0, \qquad x=\frac{2}{3}.$$

Кроме того, исходное уравнение имеет один корень, если первое уравнение имеет два корня, один из которых равен 2. Это будет при

$$(a-4)2^2+6\cdot 2-2=0, \qquad a=\frac{3}{2};$$

при этом уравнение принимает вид

$5x^2-12x+4=0; \qquad x_1=\frac{2}{5}, \qquad x_2=2.$

Ответ. $\boldsymbol{a=-\frac{1}{2}}$ **,** $\boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$ **,** $\boldsymbol{a=4}$ **.**

Задание 4: Найти все целые решения уравнения $x^2+15=4^n$, где n - натуральное.

<u>Решение</u>

Очевидно, что если x=a – корень уравнения, то x= -a - так же корень исходного уравнения. Сначала найдем все натуральные корни уравнения

$$4^n-15=x^2,$$

$$(2^n-x)(2^n+x)=15.$$

Так как x – натуральное, то $2^n+x>0$ и $2^n-x>0$,

при этом $2^n+x>2^n-x$. Возможны только два случая:

$$\begin{cases}2^n-x=1\\2^n+x=15\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2^n-x=3\\2^n+x=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}2^n-x=1\\2^n+x=15\end{cases} \qquad \begin{cases}2^n-x=3\\2^n+x=5\end{cases}$$

$$2^{n+1}=16 \qquad 2^{n+1}=8$$

$$n=3 \qquad n=2$$

$$x=7 \qquad x=1$$

Ответ. $\boldsymbol{\pm 1 \ (n=2) \ ; \ \pm 7 \ (n=3)}$ **.**

Задание 5: Для каких натуральных n справедливо равенство

$$\underbrace{(66\ldots6)^2}_{n}+\underbrace{88\ldots8}_{n}=\underbrace{44\ldots4}_{2n}?$$

Решение

$$\underbrace{36(11\dots1)^2}_{n} + \underbrace{8(11\dots1)}_{n} = \underbrace{4(11\dots1)}_{2n}$$

$$\underbrace{9(11\dots1)^2}_{n} + \underbrace{2(11\dots1)}_{n} = \underbrace{11\dots1}_{2n} \ (*)$$

$\underbrace{11\dots1}_{n} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1$ - сумма первых n членов геометрической прогрессии, у которой первый член $a_1 = 1$, знаменатель q = 10, поэтому

$$\underbrace{11\dots1}_{n} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}$$

Подставим в равенство (*) найденную сумму:

$$9\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + 2\,\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n}-1}{9},$$

откуда

$$10^n - 1 + 2 = 10^n + 1$$

$$0=0,$$

то есть исходное равенство является тождеством и справедливо для всех натуральных значений n.

Ответ. n – любое натуральное число.

Литература для подготовки

1. Гальперин Г.А., Толпыго А.Л., под ред. А.Н.Колмогорова Московские математические олимпиады. Москва: Просвещение, 1986
2. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. Москва: Просвещение, 1966
3. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Математика, физика: сборник информационно-методических и образовательных материалов/Власова Е.А., Ирьянов Н.Я., Паршев Л.П., Струков Ю.А., Шишкина С.И.; Под ред. Н.Я. Ирьянова.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 315 с.
4. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Москва: Наука, 1988

Информационные ресурсы:

https://mathus.ru/

Пособия для подготовки к олимпиадам по математике
https://journal.school-olymp.ru/posobiya-dlya-podgotovki-k-olimpiadam-po-matematike
https://olimpiadnye-zadanija.ru/predmet/matematika/
http://ermolovskiy.ru/knigi-dlya-podgotovki-k-olimpiadam/
Видеокурсы по подготовке к олимпиаде по математике
http://cendop.bmstu.ru/userfiles/docs/Razbor_zadach_math_2012.ppt