| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | ~~5~~ 15 | 25 | 15 |

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр» для обучающихся 5-11 классов 2023/2024 уч. год

$\Sigma$ 100

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 61-9-М151

№2. Пусть $A$ на доске – мн-во чисел на доске, $\vdots 11$, и $B$ – мн-во чисел $\vdots 23$. ~~Д-жем, что~~ Тогда $|A| = 18$; $|B| = 13$. Д-жем, что $|A \cap B| = 8$. Действительно, по формуле включений-исключений, на доске всего написано ~~$|A|$~~ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; тогда $|A| + |B| - |A \cap B| = 23$,

(20)

$18 + 13 - |A \cap B| = 23 \Rightarrow |A \cap B| = 8$. Все числа $a$: $a \in A \cap B$ имеют вид $a = k \cdot 11 \cdot 23$, т.к. $a \vdots 11$ т.к. $a \in A$ и $a \vdots 23$, т.к. $a \in B$ и НОД$(11;23) = 1$, и где $k$ – некоторое натуральное число.
Пусть не найдется ~~такое~~ $a$: $a \in A \cap B$; $a = 11 \cdot 23 \cdot k$; $k \geq 8$. Тогда $k$ может принимать лишь 7 разл. значений: $k \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$. То ~~$|A \cap B|$~~ в $A \cap B$ не более 7 разл. чисел, то $|A \cap B| \leq 7 < 8$, но ранее д-но, что $|A \cap B| = 8$. Противоречие. То найдется $a = 11 \cdot 23 \cdot k$, где ~~$k \in$~~ $k \geq 8$. Тогда $a \geq 11 \cdot 23 \cdot k = 2024$. То на доске найдется число, $\geq 2024$. ч.т.д.

№3. Пусть $(a_n)$ – последовательность, где $a_i$ – сумма первых $i$ нечетных чисел. То ~~$(a_n)$~~ $a_1 = 1$, ~~задается~~ и для $\forall i: i \geq 2; i \in \mathbb{N}$: $a_i = a_{i-1} + p_i$, где $p_i$ – $i$-тое нечетное число. Методом мат. индукции д-жем, что $p_i = 2i - 1$.

(~~5~~ 15)

База:
для $i = 1$:
$p_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ – верно.
Переход. Пусть ~~$p_{i-1} =$~~ $p_{i-1} = 2(i-1) - 1$. То $p_i = p_{i-1} + 2 = 2(i-1) - 1 + 2 = 2i - 1$.
Тогда $p_i = 2i - 1$ для $\forall i$.

для $i \geq 2$

Тогда $a_i = a_{i-1} + p_i = a_{i-1} + 2i-1$. Методом мат. индукции докажем, что $a_i = i^2$ для всех $i$.

База.

при $i=1$:

$a_i = 1 = 1^2$ - верно;

Переход. для $i \geq 2$. Пусть $a_{i-1} = (i-1)^2$.

Тогда $a_i = a_{i-1} + 2i - 1 = (i-1)^2 + 2i - 1 = i^2 - 2i + 1 + 2i - 1 = i^2$, то $a_i = i^2$.

Тогда $a_i = i^2$ верно для $\forall i \in \mathbb{N}$.

Предположим, что сумма ~~некоторых~~ $k$ первых нечет. чисел ~~кончает~~ оканчивается на 2024 для какого-то $k$. Тогда $a_k = k^2$ оканчивается на 2024. По признаку деления на 8, $024 \vdots 8 \Rightarrow k^2 \vdots 8$. То $k^2 \vdots 2^3$. т.к. $2 \in \mathbb{P}$, то $k^2 \vdots 2^3 \Rightarrow k \vdots 2^2$ верно, то $k^2 \vdots (2^2)^2 = 16$, но по признаку деления на 16, т.к. $k^2$ оканчивается на 2024, $k^2 \vdots 16 \Leftrightarrow 2024 \vdots 16$ ~~неверно~~, но $2024 \not\vdots 16$. Противоречие. То перв. предпол. неверно, и сумма первых нескольких нечетных нат. чисел оканчиваться на 2024 не может.

Ответ: нет, не может. ч.т.д.

№5.

15

т.к. $a > b > 0$, то $a + 2b > a + b > a$, то $a + 2b$ - гипотенуза, ~~то~~ и $a+b$ и $a$ - катеты. То по т. Пифагора $(a+2b)^2 = (a+b)^2 + a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 + 4ab + 4b^2 = (a+b)^2 + a^2 \Rightarrow 4b^2 + 4ab = (a+b)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4b(a+b) = (a+b)^2$. т.к. $a > b > 0$, то $a + b > 0$, то разделим обе части на $(a+b)$.

$4b = a + b \Rightarrow a = 3b$. Тогда.

$a + b = 4b$ и $a = 3b$ - катеты. В треугольнике против большей стороны лежит больший $\angle$, то, т.к. $b > 0$, то $4b > 3b$ ~~и против стороны~~, то острый угол, лежащий против катета с длиной $4b$, больше, то тангенс этого угла искомый и равен $\frac{4b}{3b} = \frac{4}{3}$. Ответ: $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. СТР 2

МАТЕМАТИКА

предмет

**ШИФР** 61-9-М51

25

Заметим, что $2023^x+2024^x=5p$ для к-л $p \Leftrightarrow 2023^x+2024^x \vdots 5$.

№1. Рассмотрим, какие остатки при делении на 5 дают числа $2023^x$ и $2024^x$ для $\forall x \in \mathbb{N}$.

| $x$ | $a: a \underset{5}{\equiv} 2023^x$ | $b: b \underset{5}{\equiv} 2024^x$ | остаток $2023^x$ | ост. $2024^x$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-2$ | $-1$ | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| 3 | $-3$ | $-1$ | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | $-2$ | $-1$ | 3 | 4. |

То пара остатков на $x=5$ совпала с парой остатков для $x=1$; то все следующие пары остатков также будут совпадать, создав цикл длины 4. ~~Провер~~ То $(3;4)$; $(4;1)$; $(2;1)$; $(1;1)$ – всевозможные пары остатков, ~~то~~ достигаемые при $x \underset{4}{\equiv} 1$; $x \underset{4}{\equiv} 2$; $x \underset{4}{\equiv} 3$; $x \underset{4}{\equiv} 0$ соответственно.

Рассмотрим все ~~такие~~ случаи

при $x \underset{4}{\equiv} 1$:

$2023^x+2024^x \underset{5}{\equiv} 3+4 \underset{5}{\equiv} 7 \underset{5}{\not\equiv} 0$, то нет ~~ко~~ решений,
где $x \underset{4}{\equiv} 1$.

при $x \underset{4}{\equiv} 2$: $2023^x+2024^x \underset{5}{\equiv} 4+1 \underset{5}{\equiv} 5 \underset{5}{\equiv} 0$, то
$2023^x+2024^x \vdots 5 \Leftrightarrow 2024^x+2023^x=5p$ для некоторого $p$ для всех $x \underset{4}{\equiv} 2$, ~~то~~

при $x \underset{4}{\equiv} 3$:

$2023^x+2024^x \underset{5}{\equiv} 2+1 \underset{5}{\equiv} 3 \underset{5}{\not\equiv} 0$, то нет решений,

где $x \underset{4}{\equiv} 3$.

при $x \underset{4}{\equiv} 0$:

$2023^x + 2024^x \underset{5}{\equiv} 1+1 \underset{5}{\equiv} 2 \underset{5}{\not\equiv} 0$, то нет решений, где $x \underset{4}{\equiv} 0$.

Тогда ~~единственный случай,~~ во всех решениях $x \underset{4}{\equiv} 2$.

Докажем, что $\left(x; \frac{2023^x + 2024^x}{5}\right)$ – решение для $\forall x$: $x \underset{4}{\equiv} 2$. Действительно,

$2023^x + 2024^x = 5p \Rightarrow p = \frac{2023^x + 2024^x}{5}$.

$2023^x + 2024^x \vdots 5$ для $\forall x: x \underset{4}{\equiv} 2$ (д-но ранее), то $p \in \mathbb{N}$ для $\forall x$, ~~тогда~~ ~~Пусть~~ то $\left(x; \frac{2023^x+2024^x}{5}\right)$ – решение для всех таких $x$.

~~$x; 20$~~ Тогда $\left(x; \frac{2023^x + 2024^x}{5}\right)$ ~~при~~ для $\forall x$: $x \underset{4}{\equiv} 2$ – все решения данного уравнения.

Укажем явно одно из них:

при $x = 2$ и $p = 163781$:

$2023^2 + 2024^2 = 5 \cdot 163781$.

Ответ: $\left(x; \cancel{p=} \frac{2023^x + 2024^x}{5}\right)$ для $\forall x \underset{4}{\equiv} 2$.

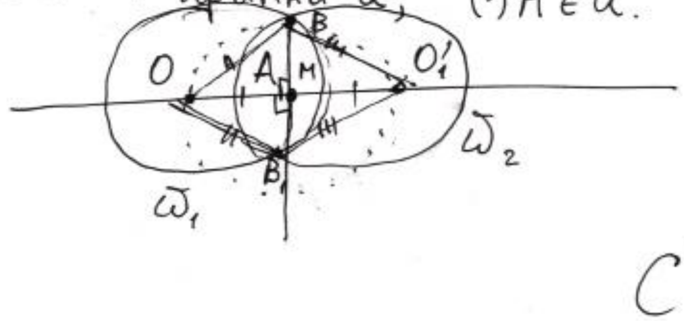
№4. Назовем прямые $a; b; c$. НУО, пусть прямая $b$ лежит в полуплоскости, ограниченной двумя другими прямыми.

Лемма. Стандартное построение 1.

Построение прямой, пересекающей данную прямую в данной точке под прямым углом.

25

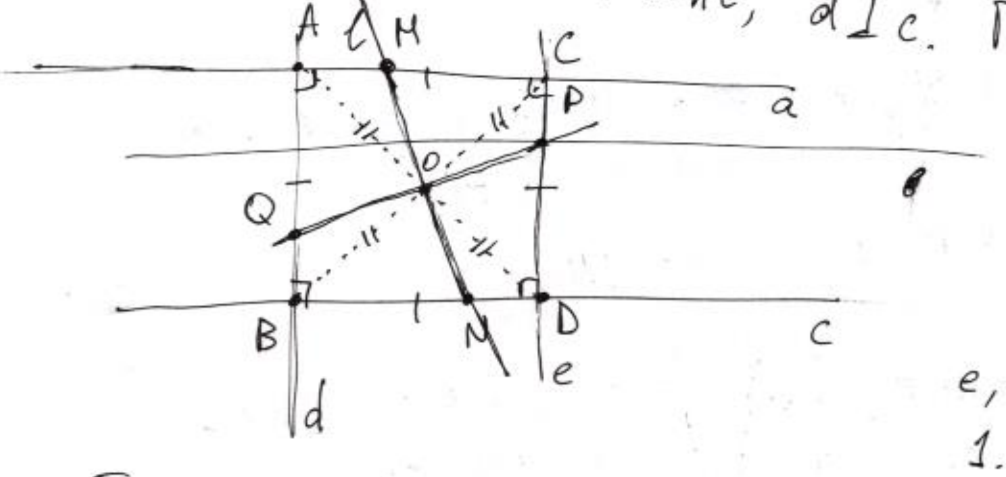
Дано: прямая $a$; $(\cdot) A \in a$. Построить: $d$: ~~$a$~~ $A \in d$; $a \perp d$.



МАТЕМАТИКА
предмет

**ШИФР** 61-9-М51

Проведем окр с центром в $A$ радиуса $r$.
~~То пусть~~ она пересекает $a$ в точках $O$ и $O_1$. То $OA = O_1A = r$.
построим окр $\omega_1$ с центром в $O$ радиуса $R > r$ и окр $\omega_2$ с ц. в $O_1$ радиуса $R$. То ~~пусть~~ $\omega_1 \cap \omega_2$ в двух точках $B$ и $B'$.
То $\triangle BOBO_1$ - равноб. ~~д-нем. Пусть $OO_1 \cap BB_1 = M$.~~ т.к. $OB = O_1B = R$, и $BA$ - медиана к основанию, то $BA$ - высота и $\angle OAB = 90°$
Аналогично, ~~в~~ $\triangle OB_1O_1$ - равноб, и $B_1A$ - мед. к осн., то $\angle OAB_1 = 90°$. Тогда $\angle BAB_1 = \angle OAB + \angle OAB_1 = 90° + 90° = 180°$, то $B, A, B_1$ лежат на одной прямой, пересекающей $OO_1$ в точке $A$ под углом $OAB = 90°$, то прямая $BB_1$ - искомая. прямая
Лемма доказана, построение выполнено.
Отметим точку $A \in a$, и, ~~и~~ выполнив построение 1, построим прямую $d$: ~~$d \in a$~~ $A \in d$; $d \perp a$.
То, ~~по т. о~~ т.к. $a \parallel c$, $d \perp c$. Пусть $d \cap c = B$.




на прямой $a$ отметим точку $C$: $AB = AC$. ~~через точку $C$ построим~~ построим прямую $e$, пользуясь построением 1. То $e \perp a$ и $e \perp c$.

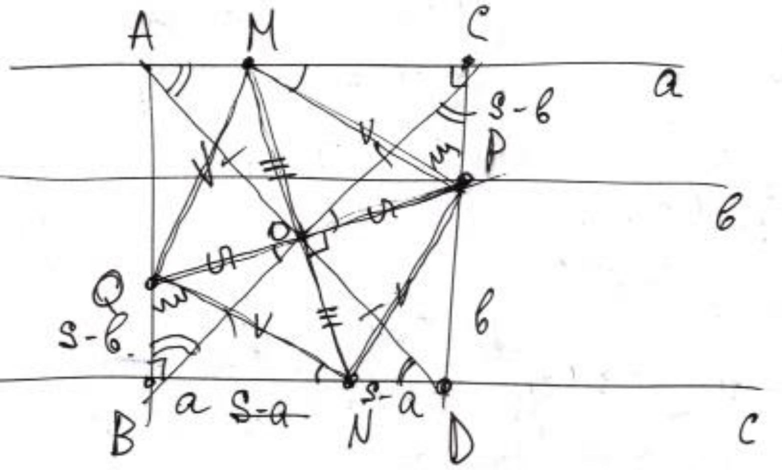
Тогда $a \perp d$ и $a \perp e$, то $d \parallel e$. Пусть $e \cap c = D$, то, т.к. $a \parallel c$ и $d \parallel e$, $ABDC$ - пар-мм. Тогда $CD = AB = AC = BD$, то ~~все~~ $ABCD$ - ромб. $\angle CAB = 90°$, то $ABDC$ - квадрат.

Пусть ~~$AC \cap BD = O$~~ $AD \cap BC = O$. То по св-ву квадрата $AO = OD = BO = OC$.

Т.к. $e \perp a$ и $b \parallel a$, то $e \perp b$, то пусть $e \cap b = P$.

Пусть ~~прямая~~ $PO$ $PO \cap AB = Q$. ~~Проведем~~ С помощью построения 1 построим прямую $l$: $l \perp PQ$; $O \in l$.

Пусть $l \cap a = M$ и $l \cap c = N$. ~~В четырехугольник~~ ~~Докажем, что~~ ~~Тогда $PNQM$ - ромб (диаг $\perp$ под углом в 90°), то $PN = NQ = QM = PM$.~~




~~Д-жем~~

в $\triangle BOQ$ и $\triangle COP$:

1) $\angle QOB = \angle COP$ (верт)

2) $\angle QBO = \angle OCP$ (накр. леж. при $AB \parallel CD$)

3) $OB = OC$ (д-но ранее)

То $\triangle OBQ = \triangle OCP$.

Тогда $OQ = OP$.

в $\triangle NOD$ и $\triangle MOA$:

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ \angle MOA = \angle NOD \text{ (верт.)} \\ 2)\ ODN = \angle MAO \text{ (накр при } CA \parallel BD) \\ 3)\ OD = AO \text{ (д-но ранее).} \end{array}\right. \Rightarrow \triangle DON = \triangle AOM.$$

Тогда в $PNQM$ диагонали делятся точкой $\cap$ пополам, то $PNQM$ - п-м. $MN \perp PQ$, то $PNQM$ - ромб, и $QM = MP = PN = QN$.

В $\triangle NBQ$ и $\triangle MCP$:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle N = \angle M \text{ (накр. при } AC \parallel BD) \\ 2)\ \angle Q = \angle P \text{ (накр. при } AB \parallel CD) \\ 3)\ QN = PM \text{ (д-но ранее)} \end{array}\right| \Rightarrow \triangle NBQ = \triangle MCP,$$

~~то $CM = CP$ и $BN$~~ $CM = BN$ и $QB = PC$.

Тогда, пусть $BD = CD = s$, $ND = a$, $DP = b$. То $CP = QB = s - b$ и ~~$CP = B$~~ $MC = BN = s + a$.

То по т. Пифагора

МАТЕМАТИКА. ШИФР 61-9-М51

предмет

$\cancel{(S-a)^2}\,a^2 + (S-b)^2 = QN = NP = a^2 + b^2 + (S-a)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + S^2 - 2bS + b^2 = b^2 + S^2 - 2aS + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2bS = 2aS \Rightarrow b = a$.

Тогда в $\triangle QBN$ и $\triangle NDP$:

1) $\angle B = \angle D = 90°$

2) $QN = NP$

3) $BN = a = b = PD$

$\Rightarrow \triangle QBN = \triangle NDP$, то $\angle QNB = 90° - \cancel{\angle QNB} - \angle NQB = 90° - \angle DNP$, то

$\angle PNQ = 180° - \angle DNP - \angle QNB = 180° - 90° = 90°$, то $\angle QNB$ ромба $QNPM = 90°$,

то $QNPM$ – квадрат. – искомый.

~~То мы привели постр~~ $M \in a$; $P \in b$, $N \in c$,

То мы привели построение искомого ~~квадрата~~. $PMQD$.

Ответ: да, можно.