Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2021/2022 учебный год

Σ 40

ПО МАТЕМАТИКЕ

1	2	3	4	5
10	20	5	0	5

КЛАСС 11

ШИФР 61-11-м-20

Задание 1.

a) Делится ли число $2022^{2021} + 2022^{2022} + 2022^{2023}$ на 5?

20 b) При каких натуральных значениях a, не кратных 5, выражение

$a^{2021} + a^{2022} + a^{2023}$ кратно 5?

Задание 2.

Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$, x и y – натуральные числа. Если число
20 x увеличить на 4, а число y уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+4$ – квадрат целого числа.

Задание 3.

Найти целые числа x и y , для которых

15

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right) = \log_2\frac{x}{17} + \log_2\frac{y}{5}$$

Задание 4.

20 В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK=16, DK=4, CD=6$.

Задание 5.

25 Сравните числа: $a^{\log_b a^2}$ и $b \cdot b^{(\log_b a)^2} + a$, если $a=2022, b=2021$.

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 61-11-м-20

Задание 1.

а) $2022^{2021}+2022^{2022}+2022^{2023}=2022^{2021}+2022^{2021}\cdot 2022+2022^{2021}\cdot 2022^{2}=$

$=2022^{2021}(1+2022+2022^{2})$.

не всегда

?

2022^{2021} не делится на 5, потому что в конце ~~число~~ цифра 2.

При умножении числа 2022 само на себя 2021 раз, мы не получим в конце 0 или 5.

$2\cdot 2=4\neq 5\neq 0$

$4\cdot 2=8\neq 5\neq 0$

$8\cdot 2=6\neq 5\neq 0$

$6\cdot 2=12\neq 5\neq 0$

$(1+2022+2022^{2})$ — сумма трёх членов геометрической прогрессии с $b_1=1$; $q=2022$.

$$\Sigma_n=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1}.$$

$$\Sigma_3=\frac{1\cdot(2022^3-1)}{2022-1}=\frac{2022^3-1}{2021}=\frac{8267114647}{2021}$$

```
   ×2022
    2022
    4044
   4044
  0000
 4044
 4088484
×   2022
 8176968
8176968
0000000
8176968
```

8267114648 – число не делится на 5, т.к. в конце не 0 и не 5.

Значит, число $2022^{2021}+2022^{2022}+2022^{2023}$ не делится на 5.

↓

б) $a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}$ кратно 5 (то есть делится на 5).

$$a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}=a^{2021}+a^{2021}\cdot a+a^{2021}\cdot a^2=a^{2021}(1+a+a^2)$$

$$\cancel{=a^{2021}\cdot\frac{1(a^3-1)}{(a-1)}=a^{2021}\cdot\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)}=a^{2021}\cdot(a^2+a+1)}$$

~~$(1+a+a^2)$ - аналогичная сумма 3 членов геометрической прогрессии~~ с $b_1=1$; $q=a$.

$a^{2021}\cdot(a^2+a+1)$ должно делиться на 5.

10б

показатель степени 2021; сумма цифр $=2+0+2+1=5$.

~~если взять число 3; 3.~~

МАТЕМАТИКА
предмет

ШИФР 61-11-М-20

5б

Задание 5.

$$\underbrace{a^{\log_b a^2}}_{①} \overset{<}{\vee} \underbrace{b\cdot b^{(\log_b a)^2}+a}_{②}\quad ; \quad a=2022,\ b=2021.$$

① $a^{\log_b a^2} = a^{2\log_b a} = \left(a^{\log_b a}\right)^2$.

② $b\cdot b^{(\log_b a)^2}+a = b\cdot b^{\log_b a\cdot\log_b a}+a = b\cdot\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b a}+a =$

$= b\cdot a^{\log_b a}+a$

$\left(a^{\log_b a}\right)^2 \overset{<}{\vee} b\cdot a^{\log_b a}+a$

Если подставить числа, то степени получатся больше 1, и значение логарифма >1.

Пусть $a^{\log_b a}=x$

$x^2 \overset{<}{\vee} bx + a$

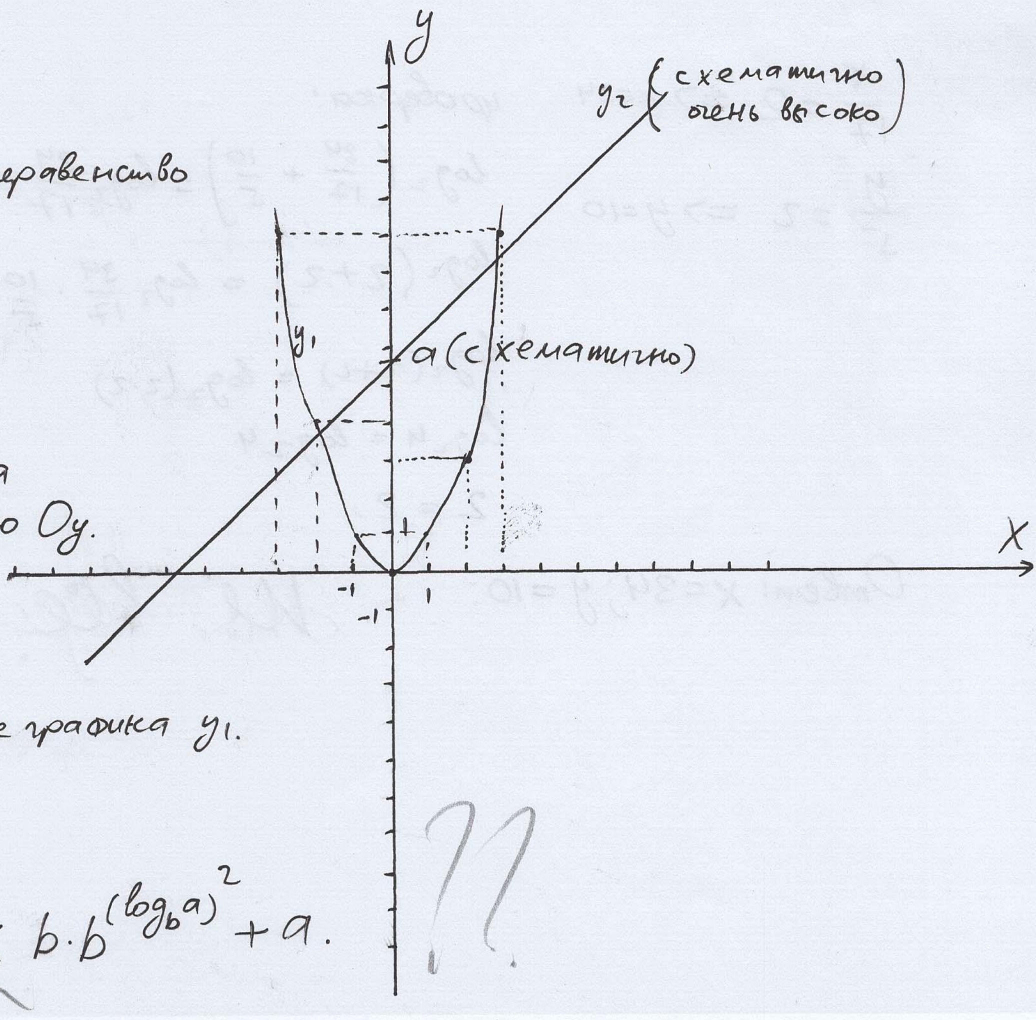
рассмотрю данное неравенство как две функции.

$y_1=x^2$ (парабола)

$y_2=bx+a$ (прямая)

$b>0$ (тангенс угла наклона

a-точка пересечения с осью Oy.



По данным чертежа, график y_2 проходит выше графика y_1.

$y_1 < y_2$

Ответ: $a^{\log_b a^2} < b\cdot b^{(\log_b a)^2}+a$.

Задание 3.

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}+\log_2\frac{y}{5}.$$

$x=?$
$y=?$

5 б

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}\cdot\frac{y}{5}$$

$$\frac{x}{17}+\frac{y}{5}=\frac{x\cdot y}{17\cdot 5}.$$

$$\frac{5x+17y}{17\cdot 5}=\frac{x\cdot y}{17\cdot 5}\Big/\cdot 17\cdot 5$$

$$5x+17y=xy.$$

x и y, так как дан логарифм, не могут быть отрицательными и должны быть не равными нулю.

Нужно найти такой случай, когда сумма чисел равна произведению этих чисел.

$2+2=4$
$2\cdot 2=4$
$4=4$

$\frac{x}{17}=2 \Rightarrow x=34$

$\frac{y}{5}=2 \Rightarrow y=10$

проверка:

$$\log_2\left(\frac{34}{17}+\frac{10}{5}\right)=\log_2\frac{34}{17}+\log_2\frac{10}{5}$$

$$\log_2(2+2)=\log_2\frac{34}{17}\cdot\frac{10}{5}$$

$$\log_2(2+2)=\log_2(2\cdot 2)$$

$$\log_2 4=\log_2 4$$

$$2=2.$$

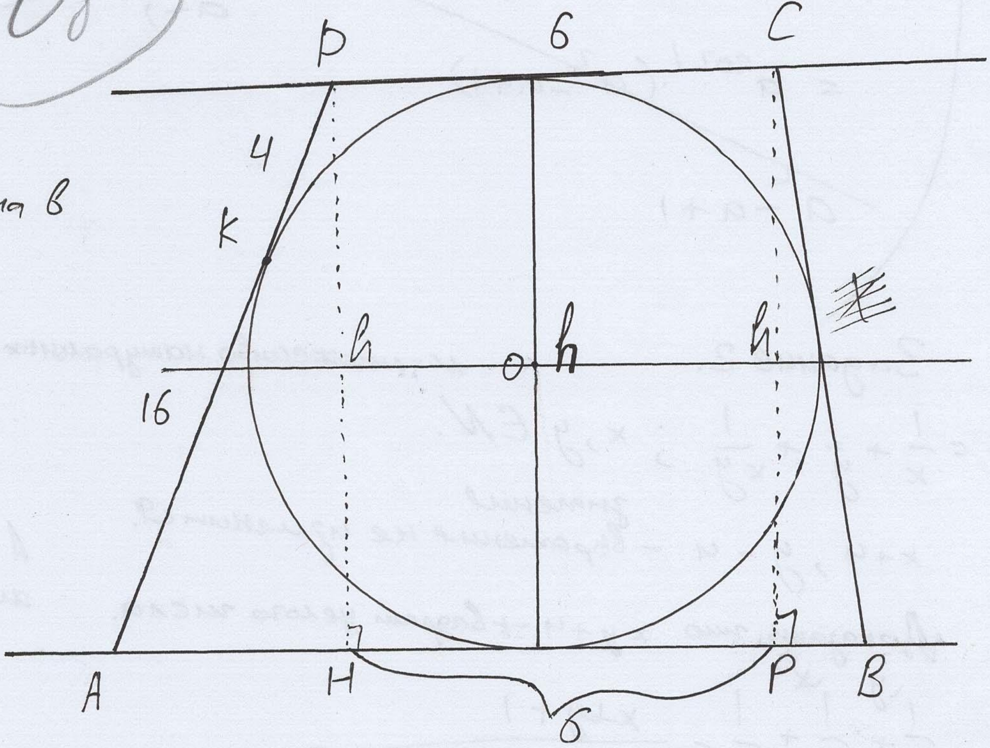
Ответ: $x=34;\ y=10.$ — Не все решения!

МАТЕМАТИКА ШИФР 61-11-м-20
предмет

Задание 4.

$S_{ABCD}=?$

Об



Решение:

т.к. окружность вписана в трапецию, то

$AD+BC=AB+CD.$

$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot h.$

$AD=AK+KD=16+4=20.$

$AD-DC=AB-BC=14.$

~~$20+x=6+x+14$~~

№1

б) $a^{2021}+a^{2022}+a^{2023} \vdots 5$

$$a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}=a^{2021}+a^{2021}\cdot a+a^{2021}+a^{2}=$$

$$=a^{2021}(1+a+a^2)=a^{2021}\cdot\frac{1(a^3-1)}{a-1}=a^{2021}\cdot\frac{(a-1)(a^2-a+1)}{a-1}=$$

$$=a^{2021}\cdot(a^2-a+1).$$

$$a^2-a+1$$

20б

Задание 2. N - множество натуральных чисел.

$A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$; $x, y \in N$.

$x+4$, $y-4$ - выражение не изменится. (значение)

A - какое-то значение данного выражения.

Доказать, что $xy+4$ - квадрат целого числа.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{x+y+1}{xy}$$

$$A=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y-4}+\frac{1}{(x+4)(y-4)}=\frac{y-4+x+4+1}{(x+4)(y-4)}=\frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy}=\frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$$

$xy=(x+4)(y-4)$;

$\cancel{xy}=\cancel{xy}-4x+4y-16$ $\Leftrightarrow$ - равносильно.

$0=4y-4x-16$

$4y-4x=16$

$4(y-x)=16$; $y-x=4$; $y=x+4$.

$xy+4 \Leftrightarrow x(x+4)+4=x^2+4x+4=(x+2)^2$. $\Leftrightarrow xy+4=(x+2)^2$.

$(x+2)^2$ - это и есть квадрат целого числа.

$\Rightarrow (xy+4)$ - квадрат целого числа.