Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5-11 КЛАССОВ
2021/2022 учебный год

Σ 80.

1	2	3	4	5
20	20	20	15	5

ПО МАТЕМАТИКЕ

КЛАСС 10

ШИФР 6110М63

Задание 1.
Три друга – Дима, Вова и Игорь – преподают геометрию, комбинаторику и теорию чисел; один из них работает в Санкт- Петербурге, другой – в Орле и третий – в Ростове-на-Дону. Дима работает не в Орле, Вова – не в Санкт-Петербурге, петербуржец преподает теорию чисел, орловец – не комбинаторику, Вова – не геометрию. Какой предмет преподает каждый из них?

Задание 2.
Дано выражение $A = xy + yz + zx,$ где $x, y, z -$ целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1) \cdot A -$ квадрат целого числа.

Задание 3.
Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что угол $\angle ADM = \angle MAD = 15°$ Найдите угол BCM и радиус вписанной и описанной около треугольника МСВ окружностей, если сторона квадрата равна 1.

Задание 4.
При каких простых значениях натурального числа p число $8p^2+1$ также простое?

Задание 5.
Найдите все решения уравнения
$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0$

Заключительный этап Олимпиады «Я – бакалавр»
для обучающихся 5-11 классов 2021/2022 уч. год

Математика
предмет

ШИФР 6110М63

Лист №1.

Чистовик:

20б

Задача №1. Т.к. в Петербурге преподают теорию чисел, а в Орле не комбинаторику, значит в Орле преподают геометрию, а комбинаторику в Ростове. Т.к. Дима не работает в Орле, значит или в Петербурге и в Ростове. Допустим в Петербурге, тогда Вова будет работать в Ростове т.к. в Орле преподают геометрию, а он её не преподает ⇒ в Орле будет работать Игорь. все верно.

Допустим Дима работает в Ростове, но тогда Вова или в Петербурге или в Орле, но в Петербурге он не работает по условию, а в Орле преподают Геометрию, а её он не преподает. ⇒ не верно

Ответ: Дима преподает теорию чисел, Вова - комбинаторику, Игорь - геометрию.

Задача №2.

20

$A = xy + yz + xz$

$A = (x+1)(y-2) + (y-2)(z-2) + (x+1)(z-2) = xy - 2x + y - 2 + yz - 2y - 2z + 4 + xz - 2x + z - 2 = xy + yz + zx - 4x - y - z$

$\Rightarrow xy + yz + xz = xy + yz + zx - 4x - y - z \Rightarrow -4x - y - z = 0 \Rightarrow y + z = -4x$

$\Rightarrow y = -4x - z$

$A = yz + x(y+z) = z(-4x - z) + x(-4x) = -4xz - z^2 - 4x^2 = -(2x+z)^2 \Rightarrow (-1)\cdot A = (2x+z)^2$ ч.т.д.

Задача №5.

5б

$(y(x-1))^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0$

$y^2((x-1)^2 + 1) - 4y|x-1| + (x-1)^2 + 1 = 0$

$D = (-4|x-1|)^2 - 4((x-1)^2+1)((x-1)^2+1) = 16(x-1)^2 - 4((x-1)^4 + 2(x-1)^2 + 1) = 16(x-1)^2 - 4(x-1)^4 - 8(x-1)^2 - 4 = -4(x-1)^4 + 8(x-1)^2 - 4 = -4((x-1)^4 - 2(x-1)^2 + 1) = -4((x-1)^2 - 1)^2$

уравнение будет иметь корни, только если $D \geq 0$ ⇒ чтобы уравнение имело корни

$-4((x-1)^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 2$

при $x = 0 \Rightarrow y^2(0-1)^2 + (0-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|0-1| = 0$

$y^2 + 1 + y^2 + 1 - 4y = 0$

$2y^2-4y+2=0$

$2(y^2-2y+1)=0$

$y^2-2y+1=0 \Rightarrow y=1$

при $x=2$

$y^2(x-1)^2+(2-1)^2+y^2+1-4y|2-1|=0$

$y^2+1+y^2+1-4y=0$

$2y^2-4y+2=0$

$2(y^2-2y+1)=0$

$y^2-2y+1=0$

$y=1$

Ответ: $(0;1);(2;1)$.

15б

Задача №4.

Рассмотрим остатки от деления на 3 вместо p в выражении $8p^2+1$

$8p^2+1 \underset{3}{\equiv} 2p^2+1$

0: $0+1=1$ не делится на 3 нацело, нам подходит, т.к. нам нужны простые

1: $2\cdot1+1=3$ делится на 3 нацело, не подходит $\Rightarrow$

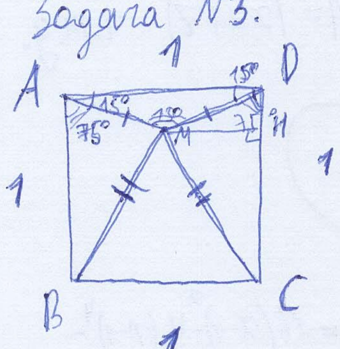
2: $2\cdot2^2+1=9$, делится на 3 нацело, $\Rightarrow$ не подходит

$\Rightarrow$ подходят такие p остаток от деления на 3 у которых 0, но одновременно p-простое, а существует всего 1 простое число, дающее остаток 0 при делении на 3 – сама 3. : $8\cdot3^2+1=73$ – простое, верно

Ответ: $p=3$.

20б

Задача №3.



т.к. $\angle ADM=\angle DAM=15° \Rightarrow \Delta ADM$ – равнобедр $\Rightarrow$ точка M равноудалена от сторон AB и CD. Треугольники AMB и MDC равны по 2 сторонам и углу между ними ($AB=DC$, квадрат; $AM=MD$, $\angle BAM=\angle MDC=75°$.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM=MC$.

т.к. точка M равноудалена от сторон AB и CD $\Rightarrow$ высота в ΔMDC

$MH=\frac{1}{2}=0{,}5$

$\sin(15°+15°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$

$2\sin15°\cdot\cos15°=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin15°\cdot\cos15°=\frac{1}{4}$, пусть $15°=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{4\cos\alpha}$

по ОТТ: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{1}{16\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow 1+16\cos^4\alpha=16\cos^2\alpha$, пусть $\cos^2\alpha=m$, $\Rightarrow$

$1+16m^2-16m=0$

$D=256-64=192=64\cdot3$, $m=\frac{16\pm8\sqrt{3}}{32}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2}$, но $\cos\alpha<1 \Rightarrow$

$\cancel{\cos15°=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$ но $\cos15°$, большее значение (больше $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow \cos15=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\sin15=\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}} =$

$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$