МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

ОЛИМПИАДА «Я-БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

5-11 КЛАССОВ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

К ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМУ ЭТАПУ ОЛИМПИАДЫ

2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА ДЛЯ **8** КЛАССА

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к освоению образовательных программ ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на верное и полное решение. Задания направлены на выявление интеллектуального потенциала, аналитических способностей и креативности мышления участников.

Очный этап олимпиады проводится только в письменной форме. Каждый участник олимпиады получает бланк с заданием одного из двух вариантов, содержащий 5 заданий. Задание считается выполненным, если получен верный ответ (ответы) на поставленный вопрос (вопросы). Задания олимпиады предполагают, что вопросов и вариантов ответа может быть несколько. Наибольшая итоговая сумма баллов, которой могут быть оценены ответы на все вопросы олимпиадного **варианта** при условии отсутствия в них ошибок, неправильных, неполных или неточных ответов, равна **100**. При отсутствии полного и верного ответа оцениваются отдельные этапы решения и характер допущенных ошибок, то есть возможен частичный зачёт баллов за неполный или неверный ответ за **задание**. Под неполным понимается ответ, содержащий правильные ответы не на все вопросы или варианты решения **задания**. Подсчёт итоговой оценки за весь **вариант** осуществляется путём суммирования баллов, выставленных за каждое из **заданий**.

На решение задач отборочного этапа Олимпиады отводится 3 часа 30 минут (три часа тридцать минут или 210 минут). Отсчет времени начинается с момента начала выполнения заданий.

ПЕРЕЧЕНЬ ЭЛЕМЕНТОВ СОДЕРЖАНИЯ, ВКЛЮЧЕННЫХ В ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАДЫ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2025/2026 УЧЕБНОГО ГОДА

РАЗДЕЛ 1. Структура и свойства натуральных чисел. Алгебра. Преобразование алгебраических выражений. Круговое движение.

Предполагает знание участником базовых понятий: одночлен, многочлен; подобные одночлены. Умение выполнять операции над многочленами. Предполагает умение участника анализировать текст и формировать математическую модель в задачах на движение (в форме уравнений и систем уравнений).

РАЗДЕЛ 2. Дробно-рациональные уравнения. Линейные и квадратные неравенства

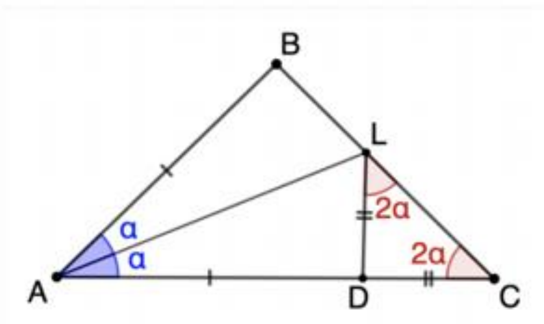
Предполагает знание участником базовых понятий: метод интервалов, метод систем, графические алгоритмы решения неравенств. Умение решать неравенства с ограничениями области определения, решать линейные и квадратные неравенства и сводящиеся к ним.

РАЗДЕЛ 3. Планиметрия: расчет элементов треугольников и четырехугольников

Предполагает знание участником важнейших фактов о взаимосвязи сторон и углов треугольников и четырехугольников; уверенное владение признаками равенства и признаками подобия; соотношение сторон и углов прямоугольного треугольника; знание основных фактов о вписанных и описанных окружностях.

Примеры заданий:

Задание 1: На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. В треугольнике провели биссектрису AL (точка L лежит на отрезке BC). Найдите длину стороны АС, если АВ=1 и $DL = DC$.



Решение

Пусть $\angle BAL = \angle DAL = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$

Так как $\Delta\, ABC -$ равнобедренный, то $\angle C = \angle A = 2\alpha$.

Так как $DL = DC$, то $\angle DLC = \angle C = 2\alpha$. $\angle ADL = 4\alpha$, как внешний угол ΔDLC.

$\Delta ABL = \Delta ALD$ по двум сторонам и углу между ними($AD = AB, AL -$ общая, $\angle BAL = \angle DAL$, откуда $\angle B = \angle ADL = 4\alpha$

По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, т.е.

$2\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180°$, $8\alpha = 180°$, $\angle BCA = 2\alpha = 45°$.

Треугольник ABC оказался прямоугольным равнобедренным, следовательно, АС=$\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{\mathbf{2}}$.

Задание 2: Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, где x и y — натуральные числа. Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1$ — квадрат целого числа.

Решение

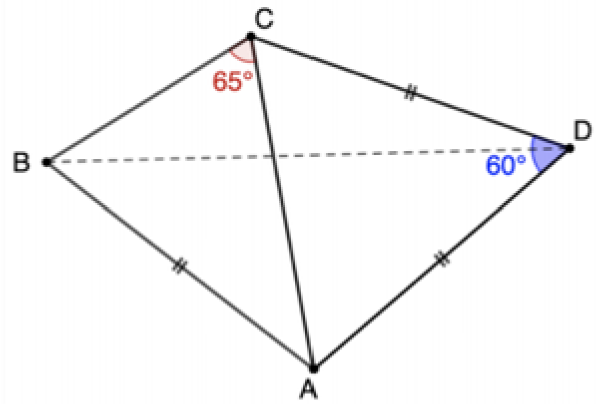
По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y-2}$, откуда $\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$.

Так как $x+y$ положительно, то $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$.

Тогда $\quad xy+1=x(x+2)+1=(x+1)^2$.

Задание 3: В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ADC=60°, AB=AD=DC$. Найдите $\angle ABD$, если $\angle BCA=65°$. Ответ дайте в градусах.

Решение



Так как $\angle ADC=60°$ и $AD=DC$, то $\angle ACD=\angle DAC=60°$ и $AD=DC=AC$, откуда $AB=AC$ и $\angle ABC=\angle BCA=65°$. По сумме углов ΔABC $\angle BAC=180°-130°=50°$, тогда $\angle BAD=\angle BAC+\angle DAC=110°$

Рассмотрим ΔABD

Так как $AB=AD$, то $\angle ABD=\angle ADB=\frac{1}{2}(180°-110°)=35°$

Ответ: 35°

Задание 4: Вычислите $x^3+\frac{1}{x^3}$, если известно, что $x+\frac{1}{x}=3$.

Решение

Воспользуемся формулой $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$(x+\frac{1}{x})^3=x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}$$

Откуда, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-9=18$

Ответ: 18.

Задание 5:

a) Делится ли число $2022^{2021}+2022^{2022}+2022^{2023}$ на 5?
b) При каких натуральных значениях a, не кратных 5, выражение $a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}$ кратно 5?

<u>Решение</u>

a) Преобразуем сумму:
$2022^{2021}+2022^{2022}+2022^{2023}=2022^{2021}(1+2022+2022^2)$.

Число в скобке заканчивается цифрой 7, следовательно, на 5 не делится.

b) $a^{2021}+a^{2022}+a^{2023}$=$a^{2021}(1+a+a^2)$. Пусть $1+a+a^2=5k$. Проанализируем наличие натуральных корней этого уравнения:

$a^2+a+1-5$k=0; D=20k-3=m^2; $20k=m^2+3$, то есть m^2 оканчивается цифрой 7, что не возможно. Следовательно, таких натуральных **a** не существует.

Ответ: а) не делится; в) таких а не существует.

Литература для подготовки

1. Гальперин Г.А., Толпыго А.Л., под ред. А.Н.Колмогорова Московские математические олимпиады. Москва: Просвещение, 1986
2. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. Москва: Просвещение, 1966
3. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Математика, физика: сборник информационно-методических и образовательных материалов/Власова Е.А., Ирьянов Н.Я., Паршев Л.П., Струков Ю.А., Шишкина С.И.; Под ред. Н.Я. Ирьянова.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 315 с.
4. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Москва: Наука, 1988

Информационные ресурсы:

https://mathus.ru/
Пособия для подготовки к олимпиадам по математике
https://journal.school-olymp.ru/posobiya-dlya-podgotovki-k-olimpiadam-po-matematike
https://olimpiadnye-zadanija.ru/predmet/matematika/
http://ermolovskiy.ru/knigi-dlya-podgotovki-k-olimpiadam/
Видеокурсы по подготовке к олимпиаде по математике
http://cendop.bmstu.ru/userfiles/docs/Razbor_zadach_math_2012.ppt