**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет»**

# ОЛИМПИАДА «Я – БАКАЛАВР» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 5–11 КЛАССОВ 2025/2026 учебный год

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

# МАТЕМАТИКА

## КЛАСС 10

### Вариант 1

**Задание 1 (20 баллов)**

Первая машина перевезла 6 контейнеров, 2 бочки и 16 мешков, общий вес составил 2160 кг. Вторая машина доставила 12 контейнеров, 16 бочек и 20 мешков общим весом 4680 кг. Третья машина должна доставить 15 контейнеров, 23 бочки и 22 мешка. Какова загрузка третьей машины?

**Решение:**

Пусть x кг – вес контейнера, y кг – вес бочки, z кг – вес мешка, тогда

$$\begin{cases} 6x + 2y + 16z = 2160 \\ 12x + 16y + 20z = 4680 \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения системы и вычитая из второго уравнения первое, получим систему

$$\begin{cases} 18x + 18y + 36z = 6840 \\ 6x + 14y + 4z = 2520 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 380 \\ 3x + 7y + 2z = 1260 \end{cases}$$

Загрузка третьей машины

$$15x + 23y + 22z = 9(x + y + 2z) + 2(3x + 7y + 2z) =$$
$$= 9 \cdot 380 + 2 \cdot 1260 = 5940$$

**Ответ: 5940 кг.**

**Задание 2 (20 баллов)**

Решите уравнение:

$$\sqrt[4]{x^4 - (a+1)x^3 + (a+1)x^2 - (a+1)x + a} -$$
$$-\sqrt[4]{-2x^4 + (2a+1)x^3 - (4+a)x^2 + (4a+2)x - 2a} = x\sqrt{-a-1}$$

**Решение**

Преобразуем подкоренные выражения с использованием парных группировок слагаемых, получим

$$\sqrt[4]{(x-a)(x-1)(x^2+1)} - \sqrt[4]{(x-a)(1-2x)(x^2+2)} = x\sqrt{-a-1}$$

Находим ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} -a-1\geq 0 \\ (x-a)(x-1)(x^2+1)\geq 0 \\ (x-a)(1-2x)(x^2+2)\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a\leq -1 \\ x\leq a; x\geq 1 \\ a\leq x\leq \frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow x=a$$

Таким образом, $x=a$ – единственная точка ОДЗ. Пусть $x=a$, тогда уравнение принимает вид: $\begin{cases} 0=a\sqrt{-a-1} \\ a\leq -1 \end{cases} \leftrightarrow a=-1$

**Ответ:** $x=-1$ при $a=-1$.

**Задание 3 (15 баллов)**

Фирма реализует два вида товаров в количестве $n$ $(n>1)$ единиц товара первого вида и $m$ $(m>1)$ единиц товара второго вида. Известно, что $m$ и $n$ являются решениями уравнения $2n-m=m\cdot n-26$. Максимальный доход фирма получает, если $n+3m$ принимает наибольшее значение. Найдите такое (такие) значения $n$ и $m$.

**Решение:**

$2n+26=mn+m$

$m(n+1)=2n+26$

$m=\dfrac{2n+2+24}{n+1}$

$m=2+\dfrac{24}{n+1}$

Находим натуральные пары значений n и $m$ $(n>1)$:

$n=2,\quad m=10,\quad n+3m=32$

$n=3,\quad m=8,\quad n+3m=27$

$n=5,\quad m=6,\quad n+3m=23$

$n=7,\quad m=5,\quad n+3m=22$

$n=11,\quad m=4,\quad n+3m=23$

$n=23,\quad m=3,\quad n+3m=32$

Наибольшее значение принимает сумма $n+3m=32$, при $n=2, m=10$ или $n=23, m=3$.

**Ответ: 32 при** $=2, m=10$ **или** $n=23, m=3$.

**Задание 4 (25 баллов)**

На часах со стрелками 20 часов 25 минут 26 секунд. Через сколько минут впервые часовая и минутная стрелки образуют развернутый угол?

**Решение:**

На часах со стрелками 20 часов эквивалентно 8 часам.

В момент времени 8 часов 25 минут 26 секунд часовая стрелка показывает

$\left(8+\frac{25}{60}+\frac{26}{3600}\right)$ часов, минутная стрелка показывает $\left(25+\frac{26}{60}\right)$ минут.
Часовая стрелка имеет угловую скорость $30\,{}^{\circ}/\text{час}$, поэтому от момента времени 00ч 00м 00сек она повернется на угол

$$\alpha=\left(8+\frac{25}{60}+\frac{26}{3600}\right)\cdot 30\,{}^{\circ}/\text{час}=\left(240+\frac{25}{2}+\frac{13}{60}\right)^{\circ}=252\frac{43}{60}{}^{\circ}.$$

Минутная стрелка имеет угловую скорость $6^{\circ}/\text{мин}$, поэтому от момента времени 08ч 00м 00с она повернется на угол

$$\beta=\left(25+\frac{26}{60}\right)\cdot 6\,{}^{\circ}/\text{мин}=\left(150+\frac{26}{10}\right)^{\circ}=152\frac{3}{5}{}^{\circ}.$$

Найдем угол между часовой и минутной стрелками

$$\alpha-\beta=252\frac{43}{60}-152\frac{3}{5}=100\frac{7}{60}{}^{\circ}.$$

Пусть минутная стрелка образует с часовой прямой угол через t минут. За это время часовая стрелка (угловая скорость $30\,{}^{\circ}/\text{час}=\frac{1}{2}{}^{\circ}/\text{мин}$) повернется на угол $\frac{1}{2}t$, а минутная стрелка (угловая скорость $6^{\circ}/\text{мин}$) - на $6t$; следовательно,

$$6t=\alpha-\beta+\frac{1}{2}t+180,\qquad \frac{11}{2}t=100\frac{7}{60}+180,\qquad \frac{11}{2}t=280\frac{7}{60}{}^{\circ}$$

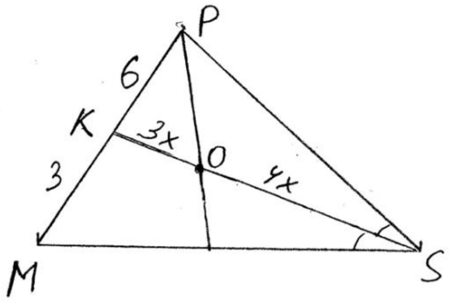
$$t=\frac{16807}{60}\cdot\frac{2}{11}=\frac{16807}{330}=50\frac{307}{330}\text{ мин.}$$

**Ответ: $50\frac{307}{330}$ мин.**

**Задание 5 (20 баллов)**

Точка O – центр вписанной в $\Delta MPS$ окружности, $SK$-биссектриса угла при вершине $S$, $MK=3$, $KP=6$. Найдите радиус вписанной в $\Delta MPS$ окружности, если $KO:OS=3:4$.

**Решение:**




Так как точка O – центр вписанной окружности и $SK$-биссектриса, то PO- биссектриса $\Delta KPS$, тогда $\frac{KP}{PS}=\frac{KO}{OS}$, $\frac{6}{PS}=\frac{3}{4}$, откуда $PS=8$.

По свойству биссектрисы $SK$ $\Delta MPS$: $\frac{MS}{PS}=\frac{MK}{KP}$, $\frac{MS}{8}=\frac{3}{6}$, откуда $MS=4$

Радиус вписанной окружности находим по формуле $S=p\cdot r$, $p=\frac{9+8+4}{2}=\frac{21}{2}$.

$$S=\sqrt{p(p-9)(p-8)(p-4)}=\sqrt{\frac{21}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{21\cdot 15\cdot 13}}{4}$$

Тогда $r=\frac{S}{p}=\frac{2}{21}\cdot\frac{\sqrt{21\cdot 15\cdot 13}}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21\cdot 15\cdot 13}{21\cdot 21}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{7}}$.

**Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{7}}$.**